CAPITOLO II

DIFFRAZIONE DI ONDE PERIODICHE IN PRESENZA DI UN CILINDRO ORIZZONTALE IMMERSO

2.1 *MOTI ONDOSI IN PRESENZA DI OSTACOLI :LA DIFFRAZIONE*

Il regime di moto periodico che si forma in campo libero si altera in presenza di un ostacolo. In particolare la presenza dell'ostacolo produce diffrazione, i cui effetti sul campo di moto si manifestano attraverso una perturbazione dell'elevazione d'onda e della distribuzione di pressione prodotta dall'onda incidente. Poiché il moto è irrotazionale, esiste il potenziale di velocità Φ del campo di moto in presenza dell'ostacolo.

L'elevazione d'onda η, la pressione p e il potenziale di velocità Φ dell'onda in presenza dell'ostacolo risultano rispettivamente:

$$\text{[2.1]} \qquad \begin{cases} \eta(x,t) = \eta_W(x,t) + \eta_S(x,t) \\ p(r,\alpha,t) = p_W(r,\alpha,t) + p_S(r,\alpha,t) \\ \Phi(r,\alpha,t) = \Phi_W(r,\alpha,t) + \Phi_S(r,\alpha,t) \end{cases}$$

Le funzioni perturbatrici η_S, p_S, Φ_S possono essere interpretate fisicamente come i parametri che caratterizzano l'elevazione d'onda, la pressione e il potenziale di velocità di un'onda "diffratta". Quindi il regime di moto in presenza di un ostacolo è determinato dalla sovrapposizione degli effetti prodotti dall'onda incidente e dall'onda diffratta.

Il problema è determinare il campo di moto prodotto dall'onda diffratta, noto il campo di moto prodotto dall'onda incidente.

Le funzioni η, p, Φ devono soddisfare il sistema [1.46] che governa i moti a potenziale con superficie libera al primo ordine di Stokes. Supponendo che l'ostacolo sia fisso le condizioni al contorno da imporre sono :

- la componente di velocità lungo z uguale a zero sul fondo

[2.2a] $$V_Z\Big|_{z=-d} = 0$$

■ la componente di velocità normale nulla sul contorno Γ dell'ostacolo

[2.2b] $$V_n\Big|_{Q} = 0 \quad \forall Q \in \Gamma$$

Poichè anche le funzioni η_W, p_W, Φ_W soddisfano lo stesso sistema a meno della condizione al contorno dell'ostacolo, le equazioni che legano le funzioni η_S, p_S, Φ_S, al primo ordine di Stokes formano il nuovo sistema [2.3]

[2.3] $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\Phi_S}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Phi_S}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2\Phi_S}{\partial\alpha^2} = 0 \\[2ex] p_S + \rho\dfrac{\partial\Phi_S}{\partial t} + \rho g\left[z_0 + r\,sin(\alpha)\right] = F(t) \\[2ex] \rho g\eta_S + \rho\left(\dfrac{\partial\Phi_S}{\partial t}\right)_{z=0} = F(t) \\[2ex] \left(\dfrac{\partial\Phi_S}{\partial z}\right)_{z=0} = \dfrac{\partial\eta_S}{\partial t} \\[2ex] \left(\dfrac{\partial\Phi_S}{\partial n}\right)_{Q} = -\left(\dfrac{\partial\Phi_W}{\partial n}\right)_{Q} \qquad \forall\ Q \in\ \Gamma \\[2ex] \left(\dfrac{\partial\Phi_S}{\partial z}\right)_{z=-d} = 0 \end{cases}$$

Inoltre l'onda diffratta deve soddisfare la condizione di radiazione all'infinito: a grande distanza dall'ostacolo il campo di moto diffratto dovrà manifestarsi in un'onda che si allontana dall'ostacolo stesso. A quella distanza dall'ostacolo gli effetti della diffrazione non si risentono, perciò possiamo assumere che la celerità dell'onda diffratta sia uguale alla celerità dell'onda incidente. Fissiamo l'attenzione sull'elevazione che assume l'onda diffratta all'istante t ,all'ascissa $x > 0$,a grande distanza dall'ostacolo (supponiamo che t sia l'istante di cresta); all'istante $t + dt$ l'onda deve allontanarsi dall'ostacolo, cioè la cresta d'onda si deve spostare all'ascissa

[2.4] $$\tilde{x} = x + c_W \ dt$$

e quindi

[2.5] $$\eta_S\left(x + c_W dt, t + dt\right) = \eta_S(x,t).$$

Sviluppando in serie di Taylor al primo ordine il primo membro della [2.5] e semplificando si ottiene la relazione

[2.6] $$\frac{\partial \eta_S}{\partial x} c_W - \frac{\partial \eta_S}{\partial t} = 0 \qquad per \ \ x \to +\infty$$

Lo stesso ragionamento che ha condotto alla [2.6] può essere ripetuto per un'onda che si realizzi a grande distanza dall'ostacolo però con $x < 0$ ottenendo

[2.7] $$\frac{\partial \eta_S}{\partial x} c_W + \frac{\partial \eta_S}{\partial t} = 0 \qquad per \ \ x \to -\infty$$

Quindi il campo di moto prodotto dall'onda diffratta può essere determinato risolvendo il sistema differenziale [2.8]

$$
[2.8] \quad \begin{cases}
\dfrac{\partial^2 \Phi_S}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Phi_S}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 \Phi_S}{\partial \alpha^2} = 0 \\[2ex]
p_S + \rho \dfrac{\partial \Phi_S}{\partial t} + \rho\, g \left[z_0 + r\, sin(\alpha) \right] = F(t) \\[2ex]
\rho\, g\, \eta_S + \rho \left(\dfrac{\partial \Phi_S}{\partial t} \right)_{z=0} = F(t) \\[2ex]
\left(\dfrac{\partial \Phi_S}{\partial z} \right)_{z=0} = \dfrac{\partial \eta_S}{\partial t} \\[2ex]
\left(\dfrac{\partial \Phi_S}{\partial n} \right)_Q = -\left(\dfrac{\partial \Phi_W}{\partial n} \right)_Q \qquad \forall \;\; Q \in \Gamma \\[2ex]
\left(\dfrac{\partial \Phi_S}{\partial z} \right)_{z=-d} = 0 \\[2ex]
\lim\limits_{x \to \mp\infty} \left(\dfrac{\partial \eta_S}{\partial x} c_W \pm \dfrac{\partial \eta_S}{\partial t} \right) = 0
\end{cases}
$$

Risolto il sistema precedente l’elevazione d’onda, la pressione e il potenziale di velocità η, p, Φ dell’onda in presenza di ostacoli si ricava dalla [2.1], mentre il campo di velocità può essere determinato dalle relazioni [1.27].

2.2 *LA SOLUZIONE ANALITICA PER UN CILINDRO ORIZZONTALE*

Una soluzione approssimata del sistema di equazioni differenziali che governano la diffrazione di un'onda periodica in presenza di un cilindro orizzontale immerso fisso è stata fornita da Dean (1947), ma l'integrazione dell'equazioni differenziali su basi matematiche rigorose è stata affrontata per la prima volta da Ursell (1949). Ogilvie (1963) riprende il problema della diffrazione ed estende la soluzione a condizioni di vincolo per il cilindro più generali, ipotizzando che possa oscillare all'interno del fluido con un periodo pari a quello delle onde in superficie. Inoltre semplifica notevolmente l'espressione matematica della soluzione, che rispetto a quella fornita da Ursell comporta quindi, difficoltà computazionali minori.

Prima di analizzare le soluzioni di Ursell e Ogilvie particolarizziamo il sistema [2.8] al caso di un cilindro orizzontale immerso che oscilli all'interno del fluido.Con riferimento alla figura 2.2 la sezione del cilindro con il piano OXZ è una circonferenza Γ_o di raggio a,mentre h è l'affondamento del baricentro G_O del cilindro.

Supponiamo che il moto avvenga su profondità infinita $(kd \to +\infty)$ e che il cilindro si muova rigidamente all'interno del campo di moto secondo la legge temporale (v. fig 2.3)

[2.9]
$$\begin{cases} \xi(t) = \xi_1 sin(\omega t) + \xi_2 \cos(\omega t) \\ \eta(t) = \eta_1 sin(\omega t) + \eta_2 \cos(\omega t) \end{cases}$$

con $\xi(t),\eta(t)$ gli scostamenti del baricentro G del cilindro solido all'istante t dalla posizione iniziale G_O.Con riferimento al sistema in coordinate polari indicato in fig.

2.2,dal sistema [2.8] ponendo $\theta = \pi/2 - \alpha$ (quindi dato che per convenzione si è assunto α positivo antiorario , allora θ sarà positivo orario) otteniamo le equazioni [2.10]

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 \Phi_S}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Phi_S}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 \Phi_S}{\partial \theta^2} = 0 \\[2ex]
p_S + \rho \dfrac{\partial \Phi_S}{\partial t} + \rho g \left[-h + r \cos(\theta) \right] = F(t) \\[2ex]
\rho g \eta_S + \rho \left(\dfrac{\partial \Phi_S}{\partial t} \right)_{z=0} = F(t) \\[2ex]
\left(\dfrac{\partial \Phi_S}{\partial z} \right)_{z=0} = \dfrac{\partial \eta_S}{\partial t} \\[2ex]
\lim\limits_{x \to \mp\infty} \left(\dfrac{\partial \eta_S}{\partial x} c_W \pm \dfrac{\partial \eta_S}{\partial t} \right) = 0 \\[2ex]
\textit{condizioni al contorno}
\end{cases}
\tag{2.10}
$$

Le condizioni al contorno da imporre sono:

1) la componente V_Z della velocità della particella di fluido per $z \to -\infty$ deve annullarsi perchè il moto avviene su profondità infinita

$$
\lim_{d \to +\infty} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{z=-d} = 0 \tag{2.11}
$$

2) la componente radiale $\dfrac{\partial \Phi}{\partial r}$ della velocità della particella di fluido che occupa la posizione individuata da un punto P sul contorno Γ (v. fig. 2.3), all'istante t , deve essere uguale alla velocità radiale V_r del punto P, che è pari a quella con cui si muove il baricentro del cilindro, dato che il moto è rigido. In formule

[2.12] $$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_P = \left(V_r\right)_P$$

Valutiamo la velocità con cui si muove il cilindro. All'istante di tempo t il punto $P \in \Gamma$ (v. fig. 2.3) è individuato dalle coordinate

[2.13] $$\begin{cases} x_P(t) = x_{P_0} + \xi(t) = a\ sin(\theta) + \xi(t) \\ z_P(t) = z_{P_o} + \eta(t) = -h + a\cos(\theta) + \eta(t) \end{cases}$$

con x_{P_o}, z_{P_o} le coordinate della sua posizione iniziale P_O, pertanto la sua velocità radiale risulta

[2.14] $$\begin{aligned} \left(V_r\right)_P &= V_{X_P}\ sin\ (\theta) + V_{Z_P}\ \cos(\theta) = \\ &= \dot{x}_P(t)\ sin(\theta) + \dot{z}_P(t)\ \cos(\theta) = \dot{\xi}(t) sin(\theta) + \dot{\eta}(t) \cos(\theta) \end{aligned}$$

la condizione [2.12] diventa

[2.15] $$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_P = \dot{\xi}(t) sin(\theta) + \dot{\eta}(t) \cos(\theta)$$

Se assumiamo che gli scostamenti siano infinitesimi rispetto all'altezza d'onda H cioè

[2.16] $$\xi/H \to 0\ ,\ \eta/H \to 0$$

è possibile semplificare ulteriormente la [2.15]. Il punto P_O si sposta radialmente e trasversalmente di (v. fig. 2.3)

[2.17] $$\begin{cases} \Delta s_r = \cos(\delta)\, P_0 P \\ \\ \Delta s_t = sin(\delta) P_0 P \end{cases} \qquad P_0 P = \sqrt{\xi^2(t) + \eta^2(t)}$$

dall'ipotesi [2.16] segue che

[2.18] $$\frac{P_0 P}{H} \to 0$$

di conseguenza anche

[2.19] $$\frac{\Delta s_r}{H} \to 0\,, \frac{\Delta s_t}{H} \to 0$$

Risulta possibile, quindi sviluppare in serie l'espressione della derivata parziale del potenziale che figura nella [2.15] ottenendo

[2.20] $$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_P = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{P_0} + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}\right)_{P_0} \Delta s_r + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta}\right)_{P_0} \frac{\Delta s_t}{a} + o\left(H^3\right)$$

poichè $\Phi \propto H$ trascuriamo i termini di ordine superiore ad H ricavando

[2.21] $$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_P \approx \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{P_0} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{r=a}$$

Ricordando che $\Phi = \Phi_W + \Phi_S$ la condizione al contorno [2.15] assume la forma

[2.22] $$\left(\frac{\partial \Phi_S}{\partial r}\right)_{r=a} = -\left(\frac{\partial \Phi_W}{\partial r}\right)_{r=a} + sin\left(\theta\right)\dot{\xi}(t) + \cos(\theta)\,\dot{\eta}(t)$$

il sistema finale [2.23] risulta in ultima analisi

$$
[2.23] \quad \begin{cases}
\dfrac{\partial^2 \Phi_S}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Phi_S}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 \Phi_S}{\partial \theta^2} = 0 \\
p_S + \rho \dfrac{\partial \Phi_S}{\partial t} + \rho\, g\left[-h + r\cos(\theta)\right] = F(t) \\
\rho\, g\, \eta_S + \rho \left(\dfrac{\partial \Phi_S}{\partial t}\right)_{z=0} = F(t) \\
\left(\dfrac{\partial \Phi_S}{\partial z}\right)_{z=0} = \dfrac{\partial \eta_S}{\partial t} \\
\left(\dfrac{\partial \Phi_S}{\partial r}\right)_{r=a} = -\left(\dfrac{\partial \Phi_W}{\partial r}\right)_{r=a} + sin(\theta)\,\dot{\xi}(t) + \cos(\theta)\,\dot{\eta}(t) \\
\lim\limits_{d \to +\infty} \left(\dfrac{\partial \Phi_S}{\partial z}\right)_{z=-d} = 0 \\
\lim\limits_{x \to \mp\infty} \left(\dfrac{\partial \eta_S}{\partial x} c_W \pm \dfrac{\partial \eta_S}{\partial t}\right) = 0
\end{cases}
$$

E' possibile semplificare ulteriormente il sistema [2.23] esprimendo le equazioni in funzione del potenziale diffratto Φ_S ottenendo

$$
[2.24] \quad \begin{cases}
\dfrac{\partial^2 \Phi_S}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Phi_S}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 \Phi_S}{\partial \theta^2} = 0 \\
\left(\dfrac{\partial \Phi_S}{\partial z}\right)_{z=0} + \dfrac{1}{g}\left(\dfrac{\partial^2 \Phi_S}{\partial t^2}\right)_{z=0} = \dfrac{F'(t)}{\rho g} \\
\left(\dfrac{\partial \Phi_S}{\partial r}\right)_{r=a} = -\left(\dfrac{\partial \Phi_W}{\partial r}\right)_{r=a} + sin(\theta)\,\dot{\xi}(t) + \cos(\theta)\,\dot{\eta}(t) \\
\lim\limits_{d \to +\infty} \left(\dfrac{\partial \Phi_S}{\partial z}\right)_{z=-d} = 0 \\
\lim\limits_{x \to \mp\infty} \left(\dfrac{\partial \Phi_S}{\partial x} c_W \pm \dfrac{\partial \Phi_S}{\partial t}\right) = 0
\end{cases}
$$

Poiché il dominio Ω occupato dal fluido è doppiamente connesso è necessario imporre per l'univocità del potenziale di velocità che sia soddisfatta la relazione

[2.25] $$\oint_{\Gamma_O} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma_O} V_t\Big|_{r=a} a\,d\theta = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)_{r=a} a\,d\theta = 0$$

in cui la circuitazione della velocità viene eseguita attorno alla circonferenza Γ_O, perché gli spostamenti dell'ostacolo sono infinitesimi. Poiché il potenziale di velocità dell'onda incidente è univoco perché definito in campo libero da ostacoli segue che

[2.26] $$\int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_W}{\partial \theta} \right)_{r=a} a\,d\theta = -\int_0^{2\pi} \frac{\partial \Phi_W}{\partial \theta} d\theta = -\Big[\Phi_W\Big]_0^{2\pi} = 0$$

pertanto la condizione [2.25] si semplifica nella

[2.27] $$\int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_S}{\partial \theta} \right)_{r=a} a\,d\theta = 0$$

Risolto il sistema [2.24] con la condizione [2.26] il campo di pressione e l'elevazione dell'onda diffratta si ricavano con le

[2.28] $$\begin{cases} p_S = -\rho g\left[-h + r\cos(\theta)\right] - \rho \dfrac{\partial \Phi_S}{\partial t} - F(t) \\ \\ \eta_S = -\dfrac{1}{g}\left(\dfrac{\partial \Phi_S}{\partial t}\right)_{z=0} - \dfrac{1}{\rho g} F(t) \end{cases}$$

mentre il campo di moto in presenza dell'ostacolo si determina con le

[2.29] $$\begin{cases} \eta(x,t) = \eta_W(x,t) + \eta_S(x,t) \\ p(r,\alpha,t) = p_W(r,\alpha,t) + p_S(r,\alpha,t) \\ \Phi(r,\alpha,t) = \Phi_W(r,\alpha,t) + \Phi_S(r,\alpha,t) \end{cases}$$

con p_W, η_W, Φ_W pressione, elevazione d'onda e potenziale di velocità dell'onda incidente.

2.2.1 *LA SOLUZIONE DI URSELL*

Ursell ipotizza che il cilindro sia fisso e fornisce per il potenziale diffratto Φ_S il seguente sviluppo in serie [2.30] valido per $r < 2h - a, \theta \in [0,2\pi]$

$$\Phi_S(kr,\theta,t;ka,kh) = \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(ka)^{n+1}}{n}\left[-q_n \tilde{f}_{n1} + p_n \tilde{f}_{n2} - p_n \tilde{g}_{n1} - q_n \tilde{g}_{n2}\right]$$

Le funzioni $\tilde{f}_{n1}, \tilde{f}_{n2}, \tilde{g}_{n1}, \tilde{g}_{n2}$, (le espressioni sono riportate in appendice) sono potenziali diffratti di velocità che soddisfano le equazioni del sistema [2.24] e la condizione di irrotazionalità [2.27] tranne la condizione al contorno sul cilindro. Inoltre non sono definite nel punto G_O di coordinate $x = 0, z = -h$.Una qualsiasi combinazione lineare di queste funzioni soddisfa ancora le stesse equazioni del sistema [2.24] (le equazioni al primo ordine di Stokes sono lineari) ma non è definita nel punto G_O.La singolarità presente nel punto G_O non costituisce un ostacolo alla risoluzione del problema perché nel caso del cilindro solido, la soluzione incognita del potenziale di velocità diffratto deve essere definita nel dominio esterno alla circonferenza Γ_o. I coefficienti $\left\{p_n \ , q_n\right\}_{n \in N}$ sono incogniti e si determinano imponendo che la componente radiale della velocità sul contorno del cilindro sia nulla, ovvero

[2.31] $$\left(\frac{\partial \Phi_S}{\partial r}\right)_{r=a} = -\left(\frac{\partial \Phi_W}{\partial r}\right)_{r=a}$$

Dalla [2.31] Ursell ricava le espressioni per i coefficienti incogniti

[2.32] $$\begin{cases} p_m = X_m + Q_S\, Y_m \\ \\ q_m = -P_S\, Y_m \end{cases} \qquad con \quad m \in \ N$$

dove $Q_S \ , P_S \ \in \ R$ soddisfano il sistema lineare

[2.33] $$\begin{bmatrix} -1 & S \\ S & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_S \\ Q_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$$

con

[2.34] $$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n}{n!} (ka)^n \ , \ b = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n!} (ka)^n$$

Per risolvere il sistema precedente con il metodo di Kramer occorre calcolare i coefficienti $\left\{X_n , Y_n\right\}_{n \in \ N}$. Il calcolo di quest'ultimi comporta la risoluzione di un sistema infinito nell'incognita $\left\{X_n\right\}_{n \in \ N}$

[2.35] $$X_m + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{A}_{m,j} (ka)^{m+j} \ X_j = -\omega \frac{H}{2} e^{-kh} \frac{(ka)^{m-1}}{(m-1)!} \qquad \forall m \in \ N$$

per poi valutare le $\left\{Y_n\right\}_{n \in \ N}$ con

[2.36] $$Y_m = -\left(\frac{\omega H}{2}\right)^{-1} 2\pi e^{-kh}(ka)\ X_m \qquad \forall\, m \in\ N$$

Semplifichiamo l'espressione della serie [2.30] definendo la nuova variabile

[2.37] $$\varepsilon_m = -\frac{(ka)^{m+1}}{m}\left(\frac{\omega H}{2}\right)e^{kh}\ X_m \qquad \forall\ m\ \in\ \ N$$

sostituendo nella [2.36] la [2.37] si ottengono le nuove espressioni per i coefficienti $\{X_n, Y_n\}_{n\ \in\ N}$

[2.38] $$\begin{cases} X_m = -\left(\dfrac{\omega H}{2}\right)e^{-kh}\ \dfrac{m}{(ka)^{m+1}}\varepsilon_m \\ \\ Y_m = 2\pi e^{-2kh}\ \dfrac{m}{(ka)^m}\varepsilon_m \end{cases} \qquad \forall\ m \in\ \ N$$

Sostituiamo la prima espressione della [2.38] nel sistema infinito [2.35] nell'incognita $\{X_n\}_{n\ \in\ N}$,ottenendo il nuovo sistema infinito nell'incognita $\{\varepsilon_n\}_{n\ \in\ N}$

[2.39] $$\varepsilon_m + (ka)^{2m}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{A}_{m,n}\varepsilon_n = \frac{(ka)^{2m}}{m!} \qquad \forall\ m \in\ \ N$$

Inoltre i coefficienti S e b si semplificano nelle espressioni

[2.40] $$\begin{cases} S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Y_n}{n!}\,(ka)^n = 2\pi e^{-2kh}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{(n-1)!} = S_\varepsilon \\ \\ b = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n}{n!}\,(ka)^n = \frac{\omega H/2}{2\pi(ka)\,e^{-kh}}\,S_\varepsilon \end{cases}$$

con S_ε un nuovo coefficiente. Risolvendo il sistema nelle incognite $\left(Q_S\ ,\ P_S\right)$ si ricavano le espressioni

[2.41] $$\begin{cases} P_S = -\dfrac{b}{1+S_\varepsilon^2} = -\dfrac{\omega H/2}{2\pi(ka)\,e^{-kh}}\dfrac{S_\varepsilon}{1+S_\varepsilon^2} \\ \\ Q_S = -\dfrac{bS_\varepsilon}{1+S_\varepsilon^2} = -\dfrac{\omega H/2}{2\pi(ka)\,e^{-kh}}\dfrac{S_\varepsilon^2}{1+S_\varepsilon^2} \end{cases}$$

Quindi i coefficienti $\left(p_m, q_m\right)_{m \in N}$ si semplificano

[2.42] $$\begin{cases} p_m = -\left(\dfrac{\omega H}{2}e^{-kh}\right)\dfrac{1}{1+S_\varepsilon^2}\dfrac{m}{(ka)^{m+1}}\varepsilon_m = -S_\varepsilon q_m \\ \\ q_m = \left(\dfrac{\omega H}{2}e^{-kh}\right)\dfrac{S_\varepsilon}{1+S_\varepsilon^2}\dfrac{m}{(ka)^{m+1}}\varepsilon_m \end{cases} \qquad \forall m \in N$$

ed il potenziale diffratto assume la forma finale [2.43]

$$\Phi_S\left(kr,\theta,t;ka,kh\right) = g\frac{H}{2\omega}e^{-kh}\frac{1}{1+S_\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n\left[-S_\varepsilon\tilde{f}_{n1} - \tilde{f}_{n2} + \tilde{g}_{n1} - S_\varepsilon\tilde{g}_{n2}\right]$$

con

- $S_\varepsilon = 2\pi e^{-2kh}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{(n-1)!}$

- i coefficienti $\{\varepsilon_n\}_{n \in N}$ ricavabili risolvendo il sistema infinito [2.39]

- a raggio del cilindro

- h affondamento del baricentro del cilindro

Ursell dimostra $\forall a,h \in R : a < h$ l'unicità della soluzione [2.43] per il potenziale diffratto di velocità e di conseguenza l'esistenza di una sola soluzione reale per il sistema infinito [2.39].

2.2.2 *LA SEMPLIFICAZIONE DI OGILVIE*

Ogilvie ipotizza che il cilindro oscilli all'interno del campo di moto con periodo T pari a quello dell'onda incidente e assume per il potenziale diffratto il seguente sviluppo in serie

$$[2.44] \qquad \Phi_S\left(kr,\theta,t;ka,kh\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_n f_{n1}+\beta_n f_{n2}+\gamma_n g_{n1}+\delta_n g_{n2}\right]$$

con $\left\{\alpha_n ,\beta_n ,\gamma_n ,\delta_n\right\}_{n\in N}$ coefficienti incogniti. La base di funzioni $f_{n1}, f_{n2}, g_{n1}, g_{n2}$ (le espressioni sono riportate in appendice) sono potenziali diffratti di velocità che soddisfano tutte le equazioni del sistema [2.24] tranne la condizione al contorno sul cilindro e non sono definite nel punto G_O.Poichè le equazioni del sistema [2.24], valide al primo ordine di Stokes, sono lineari, una qualsiasi combinazione lineare delle funzioni precedenti soddisfa ancora il sistema. E' necessario pertanto al fine di determinare i coefficienti incogniti $\left\{\alpha_n ,\beta_n ,\gamma_n ,\delta_n\right\}_{n\in N}$ imporre la condizione al contorno sul cilindro

$$[2.45] \qquad \left(\frac{\partial\Phi_S}{\partial r}\right)_{r=a}=-\left(\frac{\partial\Phi_W}{\partial r}\right)_{r=a}+\dot{\xi}(t)\,sin(\theta)+\dot{\eta}(t)\cos(\theta)$$

L'espressione del potenziale incidente Φ_W ammette lo sviluppo in serie di Fourier

$$[2.46] \qquad \Phi_W=g\frac{H}{2\omega}e^{-kh}\left[\,\tilde{F}_W\cos(\omega t)-\tilde{G}_W\,\mathrm{sen}(\omega t)\,\right]$$

con

$$
[2.47] \qquad \begin{cases} \tilde{F}_W = e^{kr\cos(\theta)}\cos[kr\,\mathrm{sen}(\theta)] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(kr)^n}{n!}\cos(n\theta) \\ \tilde{G}_W = e^{kr\cos(\theta)}\,\mathrm{sen}[kr\,\mathrm{sen}(\theta)] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(kr)^n}{n!}\,\mathrm{sen}(n\theta) \end{cases}
$$

Sfruttando l'uniforme convergenza dello sviluppo in serie di Φ_W ed ipotizzando che anche la serie [2.44] sia uniformemente convergente (ipotesi che deve essere verificata a posteriori dopo aver determinato i coefficienti incogniti) è possibile derivare termine a termine le serie rispetto a r ed imporre che sia soddisfatta la condizione [2.45].Si ottengono quindi le relazioni [2.48] a cui devono soddisfare $\{\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n\}_{n \in N}$

$$
[2.48] \qquad \begin{cases} \alpha_m + (ka)^{2m}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tilde{A}_{m,n}\alpha_n - \tilde{B}_{m,n}\beta_n\right) = \frac{\omega}{k}\eta_2(ka)^2\delta_{m1} \\ \beta_m + (ka)^{2m}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tilde{A}_{m,n}\beta_n + \tilde{B}_{m,n}\alpha_n\right) = -\frac{\omega}{k}\eta_1(ka)^2\delta_{m1} + g\frac{H}{2\omega}e^{-kh}\frac{(ka)^{2m}}{m!} \\ \gamma_m + (ka)^{2m}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tilde{A}_{m,n}\gamma_n - \tilde{B}_{m,n}\delta_n\right) = -\frac{\omega}{k}\xi_2(ka)^2\delta_{m1} + g\frac{H}{2\omega}e^{-kh}\frac{(ka)^{2m}}{m!} \\ \delta_m + (ka)^{2m}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tilde{A}_{m,n}\delta_n + \tilde{B}_{m,n}\gamma_n\right) = \frac{\omega}{k}\xi_1(ka)^2\delta_{m1} \end{cases}
$$

con $m \in N$ $\qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & se\ i = j \\ 0 & se\ i \neq j \end{cases}$

Le relazioni [2.48] sono quattro sistemi infiniti. Se il cilindro è fermo allora $\xi_1 = \xi_2 = \eta_1 = \eta_2 = 0$ e il numero dei sistemi infiniti si riduce a due ovvero

[2.49]
$$\begin{cases} \alpha_m + (ka)^{2m} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tilde{A}_{m,n} \alpha_n - \tilde{B}_{m,n} \, \beta_n \right) = 0 \\ \\ \beta_m + (ka)^{2m} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tilde{A}_{m,n} \, \beta_n + \tilde{B}_{m,n} \, \alpha_n \right) = g \frac{H}{2\omega} e^{-kh} \frac{(ka)^{2m}}{m!} \end{cases}$$

con $\gamma_m = \beta_m$, $\delta_m = -\alpha_m$, pertanto il potenziale diffratto assume la forma per il caso di cilindro fermo

[2.50]
$$\Phi_S(kr, \theta, t; ka, kh) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_n f_{n1} + \beta_n f_{n2} + \beta_n g_{n1} - \alpha_n g_{n2} \right]$$

Ogilvie riesce a ricondurre il calcolo dei coefficienti $\{\alpha_n \ , \beta_n\}_{n \in N}$ alla risoluzione di un solo sistema infinito nelle nuove incognite $\{\varepsilon_n\}_{n \in N}$.Capiamo come ciò sia possibile. Per prima cosa è necessario rendere più leggibili i sistemi infiniti [2.49]. Posto

[2.51]
$$S_x = 2\pi e^{-2kh} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}$$

con $\{x_n\}_{n \in N}$ una successione di numeri tali che la serie che figura nella [2.51] sia convergente , le [2.49] si semplificano nella forma

[2.52]
$$\begin{cases} \alpha_m + (ka)^{2m} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_{m,n} \alpha_n = -\frac{(ka)^{2m}}{m!} S_\beta \\ \\ \beta_m + (ka)^{2m} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_{m,n} \beta_n = -\frac{(ka)^{2m}}{m!} S_\alpha + g \frac{H}{2\omega} e^{-kh} \frac{(ka)^{2m}}{m!} \end{cases}$$

Si noti che nella [2.52] a meno dei termini noti,i due sistemi sono uguali. Conviene quindi definire la successione $\{\varepsilon_n\}_{n\in N}$ imponendo che soddisfi il seguente sistema infinito più semplice

$$\varepsilon_m + (ka)^{2m}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{A}_{m,n}\varepsilon_n = \frac{(ka)^{2m}}{m!} \qquad \forall\, m \in N \tag{2.53}$$

A questo punto il calcolo dei coefficienti incogniti $(\alpha_m, \beta_m)_{m\in N}$ è ricondotto a quello dei nuovi termini (K_α, K_β) che tengono conto della proporzionalità con la successione $\{\varepsilon_n\}_{n\in N}$. Infatti, poichè

$$\begin{cases}\alpha_m = K_\alpha\,\varepsilon_m \\ \beta_m = K_\beta\,\varepsilon_m\end{cases} \qquad \forall\, m \in N \tag{2.54}$$

sostituendo nella [2.52] le [2.54] e sfruttando l'identità [2.53] si ricava il sistema lineare nelle incognite (K_α, K_β)

$$\begin{cases}K_\alpha - S_\varepsilon K_\beta = 0 \\ S_\varepsilon K_\alpha + K_\beta = g\dfrac{H}{2\omega}e^{-kh}\end{cases} \tag{2.55}$$

che risolto fornisce

$$\begin{cases}K_\alpha = g\dfrac{H}{2\omega}e^{-kh}\dfrac{S_\varepsilon}{1+S_\varepsilon^2} \\ K_\beta = g\dfrac{H}{2\omega}e^{-kh}\dfrac{1}{1+S_\varepsilon^2}\end{cases} \tag{2.56}$$

quindi sostituendo le [2.56] nelle [2.54] si ottengono le espressioni dei coefficienti $\left(\alpha_m , \beta_m\right)_{m \in N}$

[2.57] $$\begin{cases} \alpha_m = g \dfrac{H}{2\omega} e^{-kh} \dfrac{S_\varepsilon}{1+S_\varepsilon^2} \varepsilon_m = S_\varepsilon \beta_m \\ \\ \beta_m = g \dfrac{H}{2\omega} e^{-kh} \dfrac{1}{1+S_\varepsilon^2} \varepsilon_m \end{cases} \qquad \forall\ m \in N$$

L’espressione finale del potenziale diffratto assume l'espressione [2.58]

$$\Phi_S\left(kr,\theta,t;ka,kh\right) = g \frac{H}{2\omega} e^{-kh} \frac{1}{1+S_\varepsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \left[S_\varepsilon f_{n1} + f_{n2} + g_{n1} - S_\varepsilon g_{n2}\right]$$

con

- S_ε coefficiente definito dalla [2.51]

- i coefficienti $\left\{\varepsilon_n\right\}_{n \in N}$ ricavabili risolvendo il sistema infinito [2.53]

- a raggio del cilindro

- h affondamento del baricentro del cilindro

E’ possibile dimostrare che la serie ottenuta risulta uniformemente convergente per $r < 2h - a, \theta \in [0,2\pi]$.Si noti come la [2.58] sia simile all'espressione del potenziale diffratto di Ursell [2.43].Per l'unicità della soluzione, dimostrata da Ursell, le due espressioni analitiche devono essere necessariamente equivalenti. Dal confronto delle due soluzioni la condizione di equivalenza impone che la base di funzioni $\left\{f_{n1}, f_{n2}, g_{n1}, g_{n2}\right\}_{n \in N}$ di Ogilvie sia legata a quella di Ursell $\left\{\tilde{f}_{n1}, \tilde{f}_{n2}, \tilde{g}_{n1}, \tilde{g}_{n2}\right\}_{n \in N}$ dalle relazioni

[2.59] $$\begin{cases} f_{n1} = -\tilde{f}_{n1} \\ f_{n2} = -\tilde{f}_{n2} \\ g_{n1} = \tilde{g}_{n1} \\ g_{n2} = \tilde{g}_{n2} \end{cases} \qquad \forall\, n \in N$$

Confrontando le espressioni delle basi di funzioni riportate in appendice è possibile constatare effettivamente che le relazioni [2.59] sono soddisfatte.

Ogilvie fornisce anche l'espressione del potenziale totale riuscendo a semplificare l'espressione [2.60]

$$\Phi = \Phi_W + \Phi_S =$$
$$g\frac{H}{2\omega}e^{-kh}\frac{1}{1+S_\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n\left[S_\varepsilon f_{n1} + f_{n2} + g_{n1} - S_\varepsilon g_{n2}\right] + g\frac{H}{2\omega}e^{-kh}\left[\tilde{F}_W\cos(\omega t) - \tilde{G}_W\,\mathrm{sen}(\omega t)\right]$$

Consideriamo l'espressione del potenziale diffratto [2.58] e sostituiamo le espressioni delle funzioni $\left\{f_{n1}, f_{n2}, g_{n1}, g_{n2}\right\}_{n\in N}$ riportate in appendice. Compattando otteniamo l'espressione [2.61]

$$\Phi_S = g\frac{H}{2\omega}e^{-kh}\frac{1}{1+S_\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\varepsilon_n\left[\mathrm{sen}(\omega t)(Z_n - S_\varepsilon W_n) - \cos(\omega t)\,(W_n + S_\varepsilon Z_n)\right]\right\}$$

con

[2.62] $$\begin{cases} Z_n = -\dfrac{\mathrm{sen}(n\theta)}{(kr)^n} + \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\left\{(kr)^m\left[\tilde{A}_{m,n}\,\mathrm{sen}(n\theta) + \tilde{B}_{m,n}\cos(n\theta)\right]\right\} \\ W_n = -\dfrac{\cos(n\theta)}{(kr)^n} + \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\left\{(kr)^m\left[-\tilde{B}_{m,n}\,\mathrm{sen}(n\theta) + \tilde{A}_{m,n}\cos(n\theta)\right]\right\} \end{cases}$$

ovvero

[2.63] $$\Phi_S = g\frac{H}{2\omega}e^{-kh}\left[\tilde{F}_S\cos(\omega t) + \tilde{G}_S\,\mathrm{sen}(\omega t)\right]$$

in cui

$$
[2.64] \qquad \begin{cases} \tilde{F}_S = -\dfrac{1}{1+S_\varepsilon^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n\left[W_n + S_\varepsilon Z_n\right] \\ \\ \tilde{G}_S = \dfrac{1}{1+S_\varepsilon^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n\left[Z_n - S_\varepsilon W_n\right] \end{cases}
$$

Semplifichiamo l'espressioni [2.64] iniziando dal coefficiente $\tilde{F}_S$.Dalla prima espressione della [2.64] sostituiamo le [2.62] ottenendo

$$
[2.65] \qquad \begin{aligned} -\tilde{F}_S\left(1+S_\varepsilon^2\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n\left[W_n + S_\varepsilon Z_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{-\varepsilon_n \frac{\mathrm{sen}(n\theta)\, S_\varepsilon + \cos(n\theta)}{(kr)^n}\right\} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\varepsilon_n \sum_{m=0}^{\infty}\left\{(kr)^m\left[\tilde{A}_{m,n}S_\varepsilon - \tilde{B}_{m,n}\right]\mathrm{sen}(m\theta) + (kr)^m\left[\tilde{B}_{m,n}S_\varepsilon + \tilde{A}_{m,n}\right]\cos(m\theta)\right\}\right\} \end{aligned}
$$

La doppia serie presente nella [2.65] è assolutamente convergente (risultato dimostrato da Ursell) e quindi è possibile invertirla ottenendo la [2.66]

$$
\begin{aligned} -\tilde{F}_S\left(1+S_\varepsilon^2\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{-\varepsilon_n \frac{\mathrm{sen}(n\theta)\, S_\varepsilon + \cos(n\theta)}{(kr)^n}\right\} + \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty}\left\{(kr)^m \,\mathrm{sen}\,(m\theta)\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\varepsilon_n\left[\tilde{A}_{m,n}S_\varepsilon - \tilde{B}_{m,n}\right]\right\} + (kr)^m \cos(m\theta)\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\varepsilon_n\left[\tilde{B}_{m,n}S_\varepsilon + \tilde{A}_{m,n}\right]\right\}\right\} \end{aligned}
$$

sviluppando ancora si ottiene la [2.67]

$$
\begin{aligned} -\tilde{F}_S\left(1+S_\varepsilon^2\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{-\varepsilon_n \frac{\mathrm{sen}(n\theta)\, S_\varepsilon + \cos(n\theta)}{(kr)^n}\right\} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\varepsilon_n\left[\tilde{B}_{0,n}S_\varepsilon + \tilde{A}_{0,n}\right]\right\} + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty}\left\{(kr)^m \,\mathrm{sen}\,(m\theta)\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\varepsilon_n\left[\tilde{A}_{m,n}S_\varepsilon - \tilde{B}_{m,n}\right]\right\} + (kr)^m \cos(m\theta)\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\varepsilon_n\left[\tilde{B}_{m,n}S_\varepsilon + \tilde{A}_{m,n}\right]\right\}\right\} \end{aligned}
$$

ricordando le espressioni riportate in appendice

$$[2.68] \qquad \begin{cases} \tilde{A}_{m,n} = A_{m+n} \dfrac{(m+n)!}{m!(n-1)!} \\ \\ B_{m,n} = B_{m+n} \dfrac{(m+n)!}{m!(n-1)!} \end{cases}$$

per $m = 0$ otteniamo i coefficienti

$$[2.69] \qquad \begin{cases} \tilde{A}_{0,n} = A_n \dfrac{n!}{(n-1)!} = n \\ \\ \tilde{B}_{0,n} = B_n \dfrac{n!}{(n-1)!} = n \end{cases}$$

mentre se si sostituisce nei sistemi infiniti [2.49] le espressioni di $\{\alpha_n, \beta_n\}_{n \in N}$ in funzione dei coefficienti $\{\varepsilon_n\}_{n \in N}$ date dalla [2.57] si ottengono le [2.70]

$$\begin{cases} S_\varepsilon \varepsilon_m + (ka)^{2m} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \left(\tilde{A}_{m,n} S_\varepsilon - \tilde{B}_{m,n} \right) = 0 \\ \\ \varepsilon_m + (ka)^{2m} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \left(\tilde{A}_{m,n} + S_\varepsilon \tilde{B}_{m,n} \right) = \dfrac{(ka)^{2m}}{m!} \left(1 + S_\varepsilon^2 \right) \end{cases} \qquad \forall \ m \in N$$

E' possibile grazie alle [2.70] " sommare " le serie interne di indice <n> ottenendo

$$[2.71] \qquad \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \left(\tilde{A}_{m,n} S_\varepsilon - \tilde{B}_{m,n} \right) = -\dfrac{S_\varepsilon \varepsilon_m}{(ka)^{2m}} \\ \\ \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \left(\tilde{A}_{m,n} + S_\varepsilon \tilde{B}_{m,n} \right) = \dfrac{1 + S_\varepsilon^2}{m!} - \dfrac{\varepsilon_m}{(ka)^{2m}} \end{cases} \qquad \forall \ m \in N$$

pertanto sostituendo nella [2.67] le [2.69] e le serie [2.71] si ottiene

$$-\tilde{F}_S\left(1+S_\varepsilon^2\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{-\varepsilon_n\frac{\mathrm{sen}(n\theta)\,S_\varepsilon+\cos(n\theta)}{(kr)^n}\right\}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{n\varepsilon_n\left[B_nS_\varepsilon+A_n\right]\right\}+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left\{(kr)^m\,\mathrm{sen}\,(m\theta)\left[-\frac{S_\varepsilon\varepsilon_m}{(ka)^{2m}}\right]\right\}+\sum_{m=1}^{\infty}\left\{(kr)^m\cos(m\theta)\left[\frac{1+S_\varepsilon^2}{m!}-\frac{\varepsilon_m}{(ka)^{2m}}\right]\right\}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{-\varepsilon_n\frac{\mathrm{sen}(n\theta)\,S_\varepsilon+\cos(n\theta)}{(kr)^n}\right\}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{n\varepsilon_n\left[B_nS_\varepsilon+A_n\right]\right\}+$$

$$-S_\varepsilon\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{(kr)^m}{(ka)^{2m}}\varepsilon_m\,\mathrm{sen}\,(m\theta)\right\}+\left(1+S_\varepsilon^2\right)\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{(kr)^m}{m!}\cos(m\theta)\right\}-\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{(kr)^m}{(ka)^{2m}}\varepsilon_m\cos(m\theta)\right\}$$

rinominiamo l’indice <m> con <n>

$$-\tilde{F}_S\left(1+S_\varepsilon^2\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{-\varepsilon_n\frac{\mathrm{sen}(n\theta)\,S_\varepsilon+\cos(n\theta)}{(kr)^n}\right\}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{n\varepsilon_n\left[B_nS_\varepsilon+A_n\right]\right\}+$$

$$-S_\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(kr)^n}{(ka)^{2n}}\varepsilon_n\,\mathrm{sen}\,(n\theta)\right\}+\left(1+S_\varepsilon^2\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(kr)^n}{n!}\cos(n\theta)\right\}-\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(kr)^n}{(ka)^{2n}}\varepsilon_n\cos(n\theta)\right\}$$

semplificando e riordinando si ottiene finalmente

$$\tilde{F}_S=\frac{1}{1+S_\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{1}{(kr)^n}+\frac{(kr)^n}{(ka)^{2n}}\right]\varepsilon_n\left[S_\varepsilon\,\mathrm{sen}\,(n\theta)+\cos(n\theta)\right]\right\}+$$

[2.72]

$$-\frac{1}{1+S_\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{n\varepsilon_n\left[B_nS_\varepsilon+A_n\right]\right\}-\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{(kr)^n}{n!}\cos(n\theta)\right\}+1$$

semplifichiamo l’altro coefficiente ovvero

$$\tilde{G}_S\left(1+S_\varepsilon^2\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n\left[Z_n-S_\varepsilon W_n\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\varepsilon_n\,\frac{\cos(n\theta)\,S_\varepsilon-\operatorname{sen}(n\theta)}{(kr)^n}\right\}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\varepsilon_n\sum_{m=0}^{\infty}\left\{(kr)^m\left[\tilde{A}_{m,n}+\tilde{B}_{m,n}S_\varepsilon\right]\operatorname{sen}(m\theta)+(kr)^m\left[\tilde{B}_{m,n}-\tilde{A}_{m,n}S_\varepsilon\right]\cos(m\theta)\right\}\right\}$$

possiamo ancora invertire la doppia serie ottenendo

$$\tilde{G}_S\left(1+S_\varepsilon^2\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\varepsilon_n\,\frac{\cos(n\theta)\,S_\varepsilon-\operatorname{sen}(n\theta)}{(kr)^n}\right\}+$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}\left\{(kr)^m\operatorname{sen}(m\theta)\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\varepsilon_n\left[\tilde{A}_{m,n}+\tilde{B}_{m,n}S_\varepsilon\right]\right\}+(kr)^m\cos(m\theta)\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\varepsilon_n\left[\tilde{B}_{m,n}-\tilde{A}_{m,n}S_\varepsilon\right]\right\}\right\}$$

sostituendo le serie [2.71] e le formule [2.69] si ottiene

$$\tilde{G}_S\left(1+S_\varepsilon^2\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\varepsilon_n\,\frac{\cos(n\theta)\,S_\varepsilon-\operatorname{sen}(n\theta)}{(kr)^n}\right\}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\varepsilon_n\left[\tilde{B}_{0,n}-\tilde{A}_{0,n}S_\varepsilon\right]\right\}+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left\{(kr)^m\operatorname{sen}(m\theta)\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\varepsilon_n\left[\tilde{A}_{m,n}+\tilde{B}_{m,n}S_\varepsilon\right]\right\}\right\}+\sum_{m=1}^{\infty}\left\{(kr)^m\cos(m\theta)\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\varepsilon_n\left[\tilde{B}_{m,n}-\tilde{A}_{m,n}S_\varepsilon\right]\right\}\right\}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\varepsilon_n\,\frac{\cos(n\theta)\,S_\varepsilon-\operatorname{sen}(n\theta)}{(kr)^n}\right\}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{n\varepsilon_n\left[B_n-A_nS_\varepsilon\right]\right\}+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left\{(kr)^m\operatorname{sen}(m\theta)\left[\frac{1+S_\varepsilon^2}{m!}-\frac{\varepsilon_m}{(ka)^{2m}}\right]\right\}+\sum_{m=1}^{\infty}\left\{(kr)^m\cos(m\theta)\left[\frac{S_\varepsilon\varepsilon_m}{(ka)^{2m}}\right]\right\}$$

eliminiamo le parentesi quadre , rinominiamo l’indice <m> con <n>

$$\tilde{G}_S\left(1+S_\varepsilon^2\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\varepsilon_n\,\frac{\cos(n\theta)\,S_\varepsilon-\mathrm{sen}(n\theta)}{(kr)^n}\right\}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{n\varepsilon_n\left[B_n-A_nS_\varepsilon\right]\right\}+$$

$$+\left(1+S_\varepsilon^2\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(kr)^n}{n!}\mathrm{sen}(n\theta)\right\}-\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\varepsilon_n\,\frac{(kr)^n}{(ka)^{2n}}\mathrm{sen}(n\theta)\right\}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\varepsilon_n\,\frac{(kr)^n}{(ka)^{2n}}S_\varepsilon\cos(n\theta)\right\}$$

semplifichiamo ed ordiniamo ottenendo finalmente

[2.73]

$$\tilde{G}_S=\frac{1}{1+S_\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{1}{(kr)^n}+\frac{(kr)^n}{(ka)^{2n}}\right]\varepsilon_n\left[\cos(n\theta)\,S_\varepsilon-\mathrm{sen}(n\theta)\right]\right\}+$$

$$+\frac{1}{1+S_\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{n\varepsilon_n\left[B_n-A_nS_\varepsilon\right]\right\}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(kr)^n}{n!}\mathrm{sen}(n\theta)\right\}$$

Il potenziale totale [2.60] semplifica nella forma

[2.74]
$$\Phi=\Phi_W+\Phi_S=g\,\frac{H}{2\omega}e^{-kh}\left\{\left[\tilde{F}_W+\tilde{F}_S\right]\cos(\omega t)+\left[-\tilde{G}_W+\tilde{G}_S\right]sin(\omega t)\right\}$$

con le

$$\begin{cases}\tilde{F}_S=\dfrac{1}{1+S_\varepsilon^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{1}{(kr)^n}+\frac{(kr)^n}{(ka)^{2n}}\right]\varepsilon_n\left[\cos(n\theta)+S_\varepsilon\,\mathrm{sen}(n\theta)\right]\right\}+\\[2ex]\qquad-\dfrac{1}{1+S_\varepsilon^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{n\varepsilon_n\left[B_nS_\varepsilon+A_n\right]\right\}-\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(kr)^n}{n!}\cos(n\theta)\right\}\\[2ex]\tilde{F}_W=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{(kr)^n}{n!}\cos(n\theta)\right\}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\tilde{G}_S=\dfrac{1}{1+S_\varepsilon^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{1}{(kr)^n}+\frac{(kr)^n}{(ka)^{2n}}\right]\varepsilon_n\left[\cos(n\theta)\,S_\varepsilon-\mathrm{sen}(n\theta)\right]\right\}+\\[2ex]\qquad+\dfrac{1}{1+S_\varepsilon^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{n\varepsilon_n\left[B_n-A_nS_\varepsilon\right]\right\}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(kr)^n}{n!}\mathrm{sen}(n\theta)\right\}\\[2ex]\tilde{G}_W=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{(kr)^n}{n!}\mathrm{sen}(n\theta)\right\}\end{cases}$$

In definitiva , in presenza di un cilindro orizzontale immerso il potenziale di velocità nel punto di coordinate (r,θ) risulta:

[2.75] $$\Phi(r,\theta,t) = g\,\frac{H}{2\omega}\,e^{-kh}\left[\tilde{F}\cos(\omega t)+\tilde{G}\,\mathrm{sen}(\omega t)\right]$$

dove

$$\begin{cases} \tilde{F} = \dfrac{1}{1+S_\varepsilon^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\varepsilon_n\left(\frac{1}{(kr)^n}+\frac{(kr)^n}{(ka)^{2n}}\right)\left[\cos(n\theta)+S_\varepsilon\,\mathrm{sen}(n\theta)\right]\right\}-\dfrac{1}{1+S_\varepsilon^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{n\varepsilon_n\left(A_n+B_nS_\varepsilon\right)\right\}+1 \\ \tilde{G} = \dfrac{1}{1+S_\varepsilon^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\varepsilon_n\left(\frac{1}{(kr)^n}+\frac{(kr)^n}{(ka)^{2n}}\right)\left[S_\varepsilon\cos(n\theta)-\mathrm{sen}(n\theta)\right]\right\}-\dfrac{1}{1+S_\varepsilon^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{n\varepsilon_n\left(A_nS_\varepsilon-B_n\right)\right\} \end{cases}$$

con

- $S_\varepsilon = 2\pi\,e^{-2kh}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{(n-1)!}$

- i coefficienti $\{\varepsilon_n\}_{n\in N}$ soluzione del sistema infinito [2.53]

- a raggio del cilindro

- h affondamento del baricentro del cilindro.

2.3 ***IL CAMPO DELLA FLUTTUAZIONE DI PRESSIONE INTORNO AL CILINDRO***

Il campo della fluttuazione di pressione intorno al cilindro solido risulta (v. formula 2.28)

$$\Delta p(r,\theta,t) = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \rho g \frac{H}{2} e^{-kh} \left[\tilde{F} \,\mathrm{sen}(\omega t) - \tilde{G} \cos(\omega t) \right] \tag{2.76}$$

con

$$\tilde{F} = \frac{1}{1+S_\varepsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \varepsilon_n \left(\frac{1}{(kr)^n} + \frac{(kr)^n}{(ka)^{2n}} \right) \left[\cos(n\theta) + S_\varepsilon \,\mathrm{sen}(n\theta) \right] \right\} +$$

$$- \frac{1}{1+S_\varepsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n\varepsilon_n \left(A_n + B_n S_\varepsilon \right) \right\} + 1$$

$$\tilde{G} = \frac{1}{1+S_\varepsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \varepsilon_n \left(\frac{1}{(kr)^n} + \frac{(kr)^n}{(ka)^{2n}} \right) \left[S_\varepsilon \cos(n\theta) - \mathrm{sen}(n\theta) \right] \right\} +$$

$$- \frac{1}{1+S_\varepsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n\varepsilon_n \left(A_n S_\varepsilon - B_n \right) \right\}$$

e

$$S_\varepsilon = 2\pi e^{-2kh} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{(n-1)!}$$

- i coefficienti $\{\varepsilon_n\}_{n \in N}$ soluzione del sistema infinito [2.53]

- a raggio del cilindro

- h affondamento del baricentro del cilindro.

La componente diffratta Δp_S della fluttuazione di pressione si calcola con l'espressione

[2.77]

$$\Delta p_S(r,\theta,t) = \rho g \frac{H}{2} e^{-kh}\left\{\left[\tilde{F} - \tilde{F}_W\right]\mathrm{sen}(\omega t) - \left[\tilde{G} + \tilde{G}_W\right]\cos(\omega t)\right\}$$

dove

[2.78]
$$\begin{cases} \tilde{F}_W(r,\theta) = e^{kr\cos(\theta)}\cos[kr\,\mathrm{sen}(\theta)] \\ \tilde{G}_W(r,\theta) = e^{kr\cos(\theta)}\,\mathrm{sen}[kr\,\mathrm{sen}(\theta)] \end{cases}$$

Dal punto di vista fisico, quando le dimensioni del cilindro solido diminuiscono l'alterazione del campo di moto dell'onda incidente deve attenuarsi ovvero per $a \to 0$ e h fissato la componente diffratta deve tendere a zero cioè

[2.79]
$$\lim_{a\to 0}\Delta p_S = 0 \qquad h \quad \mathit{fissato}$$

Il limite [2.79] può essere dimostrato analiticamente analizzando il comportamento della formula [2.77] per $a \to 0$ e h fissato.

Al limite per $a \to 0$ e h fissato, dal sistema infinito [2.53] e dalla [2.51] risulta

$$\varepsilon_m \cong \frac{(ka)^{2m}}{m!} \qquad e \qquad S_\varepsilon \cong 2\pi e^{-2kh}(ka)^2 \cong 0$$

di conseguenza dalle [2.57] risulta

$$\begin{cases} \alpha_m = S_\varepsilon \varepsilon_m \cong 0 \\ \beta_m = g\dfrac{H}{2\omega}e^{-kh}\dfrac{(ka)^{2m}}{m!} \end{cases} \qquad \forall\ m \in N$$

e dalle formule riportate in appendice

$$A_m \cong \frac{1}{m(2kh)^m} \qquad e \qquad B_m \cong 0 \qquad \forall\ m \in N$$

Fissato un punto del campo di moto di coordinate (r,θ) al limite risulta quindi

$$\tilde{F} = \frac{1}{1+S_\varepsilon^2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\varepsilon_n\left(\frac{1}{(kr)^n}+\frac{(kr)^n}{(ka)^{2n}}\right)\left[\cos(n\theta)+S_\varepsilon\,\mathrm{sen}(n\theta)\right]\right]-\sum_{n=1}^{\infty}\left[n\varepsilon_n\left(A_n+B_nS_\varepsilon\right)\right]\right\}+1\cong$$

$$\cong\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(ka)^{2n}}{n!}\left(\frac{1}{(kr)^n}+\frac{(kr)^n}{(ka)^{2n}}\right)\cos(n\theta)\right]-\sum_{n=1}^{\infty}\left[n\frac{(ka)^{2n}}{n!}\frac{1}{n(2kh)^n}\right]+1=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(kr)^n}{n!}\cos(n\theta)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(ka)^{2n}}{n!}\frac{1}{(2kh)^n}+1=\left[e^{kr\cos(\theta)}\cos[kr\,\mathrm{sen}(\theta)]-1\right]-\left[e^{\frac{(ka)^2}{2kh}}-1\right]+1=$$

$$=\tilde{F}_W-e^{\frac{(ka)^2}{2kh}}+1\cong\tilde{F}_W$$

mentre

$$\tilde{G} = \frac{1}{1+S_\varepsilon^2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\varepsilon_n\left(\frac{1}{(kr)^n}+\frac{(kr)^n}{(ka)^{2n}}\right)\left[S_\varepsilon\cos(n\theta)-\mathrm{sen}(n\theta)\right]\right]-\sum_{n=1}^{\infty}\left[n\varepsilon_n\left(A_nS_\varepsilon-B_n\right)\right]\right\}\cong$$

$$\cong-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(ka)^{2n}}{n!}\left(\frac{1}{(kr)^n}+\frac{(kr)^n}{(ka)^{2n}}\right)\mathrm{sen}(n\theta)\right]=$$

$$\cong-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(kr)^n}{n!}\mathrm{sen}(n\theta)=-e^{kr\cos(\theta)}\,\mathrm{sen}[kr\,\mathrm{sen}(\theta)]=-\tilde{G}_W$$

pertanto per $a\to 0$ e h fissato

$$\Delta p_S=\rho g\frac{H}{2}e^{-kh}\left\{\left[\tilde{F}-\tilde{F}_W\right]sin(\omega t)-\left[\tilde{G}+\tilde{G}_W\right]\cos(\omega t)\right\}\cong 0$$

come volevasi dimostrare.

2.4 *I COEFFICIENTI DI DIFFRAZIONE INTORNO AL CILINDRO*

Il confronto tra la distribuzione di pressione dovuta al moto ondoso nell'intorno del cilindro solido e quella che si avrebbe nella zona circostante un volume d'acqua equivalente al cilindro, può essere fatto analizzando il coefficiente di diffrazione della fluttuazione di pressione, definito come

[2.80] $$C_d(r,\theta) = \frac{\left(\Delta p_W + \Delta p_S\right)\big|_{MAX}}{\left(\Delta p_W\right)\big|_{MAX}}$$

con $\Delta p_W, \Delta p_S$ rispettivamente fluttuazione di pressione dovuta all'onda incidente e fluttuazione di pressione dovuta all'onda diffratta nel punto di coordinate (r,θ). In un punto del campo di moto intorno al cilindro valori del coefficiente $C_d \cong 1$ indicano che gli effetti della diffrazione sono trascurabili mentre se$C_d >> 1$ o $C_d << 1$ significa che il campo di moto dell'onda incidente è alterato profondamente dalla presenza del cilindro solido. L'espressione analitica del coefficiente di diffrazione é

[2.81] $$C_d(r,\theta) = \frac{\sqrt{\tilde{F}^2 + \tilde{G}^2}}{\sqrt{\tilde{F}_W^2 + \tilde{G}_W^2}}$$

2.5 *IL CAMPO DI MOTO INTORNO AL CILINDRO*

Le ipotesi che stanno alla base della soluzione di Ogilvie sono quelle di fluido ideale, incomprimibile ed irrotazionale. Quest'ultima ipotesi consente di determinare la dinamica del fluido conoscendo la funzione potenziale di velocità Φ. Noto il potenziale di velocità è facile risalire al campo delle velocità grazie alle relazioni

[2.82]
$$\begin{cases} V_r = \dfrac{\partial \Phi}{\partial r} \\ V_t = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \end{cases}$$

dove con i pedici r, t si indicano rispettivamente la direzione radiale e trasversale con riferimento al sistema in coordinate polari (r, α) (v. fig. 2.4). Poichè si è posto $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - \theta$ (v. fig. 2.4) le [2.82] si modificano nelle

[2.83]
$$\begin{cases} V_r = \dfrac{\partial \Phi}{\partial r} \\ V_t = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Phi}{\partial \theta} \end{cases}$$

dove questa volta i pedici r, t indicano rispettivamente la direzione radiale e trasversale con riferimento al sistema (r, θ).Pertanto il campo di velocità si valuta analiticamente con

[2.84]
$$\begin{cases} V_r = g\dfrac{Hk}{2\omega}e^{-kh}\left[\tilde{F}_r \cos(\omega t) + \tilde{G}_r \operatorname{sen}(\omega t)\right] \\ V_t = g\dfrac{Hk}{2\omega}e^{-kh}\left[\tilde{F}_t \cos(\omega t) + \tilde{G}_t \operatorname{sen}(\omega t)\right] \end{cases}$$

con

$$
[2.85] \qquad \begin{cases} \tilde{F}_r(r,\theta) = \dfrac{1}{1+S_\varepsilon^2} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n\varepsilon_n \left(-\dfrac{1}{(kr)^{n+1}} + \dfrac{(kr)^{n-1}}{(ka)^{2n}} \right) \left[\cos(n\theta) + S_\varepsilon \operatorname{sen}(n\theta) \right] \right\} \\ \\ \tilde{G}_r(r,\theta) = \dfrac{1}{1+S_\varepsilon^2} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n\varepsilon_n \left(-\dfrac{1}{(kr)^{n+1}} + \dfrac{(kr)^{n-1}}{(ka)^{2n}} \right) \left[S_\varepsilon \cos(n\theta) - \operatorname{sen}(n\theta) \right] \right\} \end{cases}
$$

e

$$
[2.86] \qquad \begin{cases} \tilde{F}_t(r,\theta) = \dfrac{1}{1+S_\varepsilon^2} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n\varepsilon_n \left(\dfrac{1}{(kr)^{n}} + \dfrac{(kr)^{n}}{(ka)^{2n}} \right) \left[-S_\varepsilon \cos(n\theta) + \operatorname{sen}(n\theta) \right] \right\} \\ \\ \tilde{G}_t(r,\theta) = \dfrac{1}{1+S_\varepsilon^2} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n\varepsilon_n \left(\dfrac{1}{(kr)^{n}} + \dfrac{(kr)^{n}}{(ka)^{2n}} \right) \left[\cos(n\theta) + S_\varepsilon \operatorname{sen}(n\theta) \right] \right\} \end{cases}
$$

Per la determinazione del campo delle accelerazioni intorno al cilindro è sufficiente applicare le relazioni

$$
[2.86] \qquad \begin{cases} a_r(r,\theta,t) = \dfrac{dV_r}{dt} = \dfrac{\partial V_r}{\partial t} + \dfrac{\partial V_r}{\partial r} V_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V_r}{\partial \theta} V_t \cong \dfrac{\partial V_r}{\partial t} \\ \\ a_t(r,\theta,t) = \dfrac{dV_t}{dt} = \dfrac{\partial V_t}{\partial t} + \dfrac{\partial V_t}{\partial r} V_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V_t}{\partial \theta} V_t \cong \dfrac{\partial V_t}{\partial t} \end{cases}
$$

in cui si sono trascurati i termini delle derivate parziali spaziali perchè nell'ipotesi di validità del limite di Stokes sono infinitesimi di ordine H^2.Per il cilindro solido si hanno le seguenti espressioni analitiche

$$
[2.87] \qquad \begin{cases} a_r(r,\theta,t) = g\dfrac{Hk}{2} e^{-kh} \left[-\tilde{F}_r \operatorname{sen}(\omega t) + \tilde{G}_r \cos(\omega t) \right] \\ \\ a_t(r,\theta,t) = g\dfrac{Hk}{2} e^{-kh} \left[-\tilde{F}_t \operatorname{sen}(\omega t) + \tilde{G}_t \cos(\omega t) \right] \end{cases}
$$

con le $\left(\tilde{F}_r, \tilde{G}_r\right)$ espresse dalle [2.84] e le $\left(\tilde{F}_t, \tilde{G}_t\right)$ dalle [2.85].

Dalle [2.82] e [2.86] è possibile valutare anche il campo di moto intorno ad un volume d'acqua equivalente al cilindro solido utilizzando la soluzione analitica di Stokes per onde periodiche in campo libero da ostacoli. Le relative espressioni analitiche valgono: per il campo di velocità si hanno le [2.88]

$$\begin{cases} \left(V_W\right)_r = g\dfrac{Hk}{2\omega}e^{kr\cos(\theta)}\left\{\cos(\theta)\cos\left[kr\,\mathrm{sen}(\theta)+\omega t\right]-\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}\left[kr\,\mathrm{sen}(\theta)+\omega t\right]\right\} \\ \left(V_W\right)_t = g\dfrac{Hk}{2\omega}e^{kr\cos(\theta)}\left\{\mathrm{sen}(\theta)\cos\left[kr\,\mathrm{sen}(\theta)+\omega t\right]-\cos(\theta)\,\mathrm{sen}\left[kr\,\mathrm{sen}(\theta)+\omega t\right]\right\} \end{cases}$$

mentre per il campo delle accelerazioni si hanno le [2.89]

$$\begin{cases} \left(a_W\right)_r = -g\dfrac{Hk}{2\omega}e^{kr\cos(\theta)}\left\{\cos(\theta)\,\mathrm{sen}\left[kr\,\mathrm{sen}(\theta)+\omega t\right]+\mathrm{sen}(\theta)\cos\left[kr\,\mathrm{sen}(\theta)+\omega t\right]\right\} \\ \left(a_W\right)_t = g\dfrac{Hk}{2\omega}e^{kr\cos(\theta)}\left\{-\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}\left[kr\,\mathrm{sen}(\theta)+\omega t\right]+\cos(\theta)\cos\left[kr\,\mathrm{sen}(\theta)+\omega t\right]\right\} \end{cases}$$