CAPITOLO I

MECCANICA DELLE ONDE PERIODICHE

1.1 I PARAMETRI FISICI CHE DESCRIVONO IL MOTO DI UN FLUIDO

Si abbia una regione Ω occupata da un fluido in condizioni di moto generico. Ipotizziamo che esso sia incomprimibile, cioè che la sua massa volumica non vari nel tempo ed assimiliamolo ad un sistema materiale continuo. Inoltre considereremo il fluido perfetto in modo da poter trascurare gli effetti della viscosità. Fissato un sistema di riferimento ortogonale $OXYZ$, consideriamo una superficie chiusa S. La massa di fluido che occupa lo spazio delimitato dalla superficie S la identifichiamo con Ms mentre quella che occupa lo spazio esterno alla superficie con Me. Le due masse, durante il moto, interagiscono tra di loro attraverso la superficie S. Su questa superficie, punto per punto, nascono delle forze che la massa Ms esercita sulla massa Me che per il III principio di Newton sono uguali e contrarie alle forze che la massa Me esercita sulla massa Ms. L'aver assunto che il fluido sia perfetto ovvero che gli effetti della viscosità siano trascurabili, implica che le forze che si scambiano le due masse hanno direzione coincidente con la normale alla superficie nel punto in cui esse agiscono. Dividiamo la superficie S in infinite aree infinitesime dS. Pertanto definiamo pressione p nel punto $P_o(x, y, z)$ all'istante t

[1.1] $$p(x, y, z, t) = \lim_{ds \to 0} \frac{dF}{dS}$$

con dS area infinitesima centrata nel punto $P_o(x, y, z)$ e dF il modulo della forza che si scambiano le due masse attraverso la superficie infinitesima dS, all'istante t. La forza complessiva che agisce sulla superficie S risulta

[1.2] $$\vec{F} = \int_S p\,\vec{n}\,dS$$

con $\vec{n}$ vettore dei coseni direttori della normale alla superficie nel punto $P(x,y,z)$.

Per poter descrivere il moto dell'intera massa liquida definiamo la funzione vettoriale $\vec{V}(x,y,z,t)$ che stabilisce una corrispondenza biunivoca tra la velocità che ha una particella di fluido quando all'istante t occupa la posizione individuata dal punto $P(x,y,z)$ ed il punto $P(x,y,z)$. Fissato un sistema di riferimento ortogonale $OXYZ$ la funzione precedente può essere espressa attraverso le sue componenti scalari, ovvero

[1.3] $$\vec{V}(x,y,z,t) = V_X\ (x,y,z,t)\ \hat{i} + V_Y\ (x,y,z,t)\,\hat{j} + V_Z\ (x,y,z,t)\ \hat{k}$$

con $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ versori delle direzioni OX, OY, OZ .

Le due funzioni $p(x,y,z,t)$ e $\vec{V}(x,y,z,t)$ caratterizzano completamente la dinamica del fluido. Note le condizioni iniziali in cui si trova il fluido e la geometria della regione che occupa ,come si determinano queste funzioni ?

La Fisica ci viene incontro ricordandoci che durante il moto di un sistema materiale continuo devono valere le due leggi fondamentali:

1) la legge di conservazione della massa

2) la II legge di Newton

L'applicazione della prima legge ci porterà alla scrittura di una equazione di continuità che esprime l'invarianza della massa di un elemento di volume infinitesimo $dV = dxdydz$ durante il moto del fluido. Dall'applicazione della II legge di Newton ricaveremo delle equazioni che esprimono l'equilibrio, secondo direzioni assegnate,delle forze che agiscono su un elemento di volume infinitesimo $dV = dxdydz$.

Naturalmente le equazioni precedenti devono valere per tutti gli infiniti elementi di volume dV in cui abbiamo diviso la regione dello spazio occupata dal fluido.

Applichiamo le due leggi viste sopra ad un fluido il cui moto avviene prevalentemente lungo le due direzioni ortogonali dello spazio X e Z, ovvero ogni particella è dotata di componenti di velocità V_X e V_Z mentre V_Y è identicamente nulla in tutto il dominio occupato dal fluido. Ogni linea di flusso è, quindi, una curva che appartiene ad un piano parallelo a OXZ.La pressione e la velocità risultano quindi indipendenti dalla variabile y ed il moto del fluido si dirà "piano ".

Pertanto, definito il sistema di riferimento ortogonale OXZ (v. fig. 1.1) il moto del fluido è definito dalle funzioni

[1.4] $$\begin{cases} \vec{V}(x,z,t) = V_X\,(x,z,t)\,\hat{i} + V_Z\,(x,z,t)\,\hat{j} \\ \\ p(x,z,t) \end{cases}$$

con $\hat{i}, \hat{j}$ versori delle direzioni OX, OZ .

Assumendo un sistema di riferimento in coordinate polari (v. fig. 1.1) la velocità e la pressione risultano rispettivamente:

[1.5] $$\begin{cases} \vec{V}(r,\alpha,t) = V_r\,(r,\alpha,t)\,\hat{r} + V_t\,(r,\alpha,t)\,\hat{t} \\ \\ p(r,\alpha,t) \end{cases}$$

con $\hat{r}$ e $\hat{t}$ versori rispettivamente della direzione radiale e trasversale.

Fissato un punto P del piano la relazione che intercorre tra le coordinate cartesiane (x,z) e quelle polari (r,α) sono (v. fig. 1.1):

$$\begin{cases} x = x_O + r\,\cos(\alpha) \\ z = z_O + r\,sin(\alpha) \end{cases} \qquad [1.6]$$

con $r > 0$ e α positivo antiorario.

1.2 *EQUAZIONE DI CONTINUITÀ'*

Il fluido occupa un dominio Ω del piano OXZ. Consideriamo un'area infinitesima $dS = r\,dr\,d\alpha$ (v. fig. 1.2) individuata dalle coordinate polari (r,α).

Per la conservazione della massa il flusso di massa entrante dQ_E deve essere uguale a quello di massa uscente dQ_U ; con le notazioni di fig. 1.2 si ha

$$\begin{cases} dQ_E = \rho V_r\left(r - \frac{dr}{2},\alpha,t\right)\left(r - \frac{dr}{2}\right)d\alpha dt + \rho V_t\left(r,\alpha - \frac{d\alpha}{2},t\right)drdt \\ dQ_U = \rho V_r\left(r + \frac{dr}{2},\alpha,t\right)\left(r + \frac{dr}{2}\right)d\alpha dt + \rho V_t\left(r,\alpha + \frac{d\alpha}{2},t\right)drdt \end{cases} \qquad [1.7]$$

Sviluppiamo in serie di Taylor al primo ordine risultando $dr, d\alpha$ infinitesimi. Imponendo l'uguaglianza dei flussi cioè $dQ_E = dQ_U$ e trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al secondo, risulta

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_t}{\partial \alpha} + \frac{V_r}{r} = 0 \qquad [1.8]$$

equazione che deve essere soddisfatta in tutti i punti del dominio Ω occupato dal fluido.

1.*3 EQUAZIONI DI EQUILIBRIO*

Consideriamo la massa di fluido che all'istante t occupa l'area infinitesima $dS = r\,dr\,d\alpha$. Per la II legge di Newton le forze che agiscono sulla massa di fluido infinitesima devono equilibrare la forza d'inerzia che nasce nella massa stessa per effetto del moto.

Consideriamo le azioni di forza agenti all'istante t sulla massa $dm = \rho r\,dr\,d\alpha$.La risultante delle forze agenti su $dS = r\,dr\,d\alpha$ ha componenti (v. fig. 1. 3)

$$
[1.9]\quad \begin{cases} dF_r = p_N \overset{\frown}{AD} - p_{N'} \overset{\frown}{BC} + p_{M'} sin\left(\dfrac{d\alpha}{2}\right)\overline{DC} + p_M sin\left(\dfrac{d\alpha}{2}\right)\overline{AB} - dm\,g\,sin(\alpha) \\ \\ dF_t = p_M \cos\left(\dfrac{d\alpha}{2}\right)\overline{AB} - p_{M'} \cos\left(\dfrac{d\alpha}{2}\right)\overline{DC} - dm\,g\cos(\alpha) \end{cases}
$$

ovvero, poiché $\operatorname{sen}(d\alpha/2) \cong d\alpha/2, \cos(d\alpha/2) \cong 1$ le [1.9] si semplificano nelle [1.10]

$$
\begin{cases} dF_r = p\left(r-\dfrac{dr}{2},\alpha,t\right)\left(r-\dfrac{dr}{2}\right)d\alpha - p\left(r+\dfrac{dr}{2},\alpha,t\right)\left(r+\dfrac{dr}{2}\right)d\alpha \\ \qquad + p\left(r,\alpha+\dfrac{d\alpha}{2},t\right)dr\dfrac{d\alpha}{2} + p\left(r,\alpha-\dfrac{d\alpha}{2},t\right)dr\dfrac{d\alpha}{2} - \rho g\,rdrd\alpha sin(\alpha) \\ \\ dF_t = p\left(r,\alpha-\dfrac{d\alpha}{2},t)\right)dr - p\left(r,\alpha-\dfrac{d\alpha}{2},t\right)dr - \rho r\,dr\,d\alpha\,g\cos(\alpha) \end{cases}
$$

sviluppando in serie di Taylor e trascurando gli infinitesimi del terzo ordine, le espressioni precedenti si semplificano in

[1.11]
$$\begin{cases} dF_r = -\dfrac{\partial p}{\partial r} r d\alpha dr - \rho g\, r\, dr\, d\alpha\, sin(\alpha) \\ \\ dF_t = -\dfrac{\partial p}{\partial \alpha} dr d\alpha - \rho g\, r\, dr\, d\alpha\, \cos(\alpha) \end{cases}$$

Le forze d'inerzia che nascono per effetto del moto valgono

[1.12]
$$\begin{cases} dF_r^{'} = -\rho a_r (r,\alpha,t) r\, dr\, d\alpha \\ \\ dF_t^{'} = -\rho a_t \left(r,\alpha,t\right) r\, dr\, d\alpha \end{cases}$$

con a_r, a_t le accelerazioni,radiale e trasversale,della massa dm.

Imponiamo che le forze esterne siano in equilibrio con le forze d'inerzia ,cioè

[1.13]
$$\begin{cases} dF_r + dF_r^{'} = 0 \\ \\ dF_t + dF_t^{'} = 0 \end{cases}$$

sostituendo nelle [1.13] le espressioni [1.11] e [1.12] e dividendo per $r\, dr\, d\alpha$ otteniamo il sistema di equazioni

[1.14]
$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial r} + \rho a_r + \rho g\, sin(\alpha) = 0 \\ \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial p}{\partial \alpha} + \rho a_t + \rho g \cos(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Esiste una relazione che lega le accelerazioni a_r, a_t che la massa dm assume all'istante t e la velocità che possiede allo stesso istante.La massa è infinitesima e quindi può essere schematizzata come un punto materiale P,il quale all'istante t occupa la posizione (r,α) ed è animato da una velocità

[1.15] $$\vec{V}_P(t) = V_r\,(r,\alpha,t)\,\hat{r} + V_t\,(r,\alpha,t)\,\hat{t}$$

All'istante $t+dt$ per effetto dell velocità posseduta dal punto materiale la massa si sposta nella nuova posizione individuata dalle coordinate polari

[1.16] $$\begin{cases} r' = r + V_r\, dt \\ \alpha' = \alpha + \dfrac{V_t}{r} dt \end{cases}$$

ed assume la velocità

[1.17] $$\vec{V}_P(t+dt) = V_r\,(r',\alpha',t+dt)\,\hat{r} + V_t\,(r',\alpha',t+dt)\;\hat{t}$$

pertanto all'istante t l'accelerazione della massa dm risulta

[1.18] $$\vec{a}_P(t) = \lim_{dt\to 0}\frac{\vec{V}_P(t+dt) - \vec{V}_P(t)}{dt} = \frac{dV_r}{dt}\hat{r} + \frac{dV_t}{dt}\hat{t} = a_r(r,\alpha,t)\,\hat{r} + a_t(r,\alpha,t)\,\hat{t}$$

Le equazioni di equilibrio [1.14] assieme all'equazione di continuità [1.8] costituiscono il sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali che con le opportune condizioni al contorno descrive la dinamica di un fluido perfetto incomprimibile. Il sistema è il seguente

[1.19] $$\begin{cases} \dfrac{\partial V_r}{\partial r} + \dfrac{V_r}{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V_t}{\partial \alpha} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial p}{\partial r} + \rho\dfrac{dV_r}{dt} + \rho g\, sin(\alpha) = 0 \\[2ex] \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial p}{\partial \alpha} + \rho\dfrac{dV_t}{dt} + \rho g\cos(\alpha) = 0 \\[2ex] \textit{condizioni al contorno} \end{cases}$$

Naturalmente le funzioni $V_r(r,\alpha,t)$, $V_t(r,\alpha,t)$, $p(r,\alpha,t)$ devono essere definite nel dominio Ω individuato dalla regione occupata dal fluido.

1.4 *LA CONDIZIONE DI IRROTAZIONALITÀ*

Durante il moto del fluido la generica massa infinitesima dm può ruotare rigidamente e deformarsi a causa della distribuzione irregolare della velocità. Imponiamo che l'atto di moto della massa infinitesima sia solo quello di deformarsi.Si è "vincolato internamente" il fluido eliminando il grado di libertà rotazionale della massa dm.

Cerchiamo di determinare la relazione differenziale che intercorre tra i parametri che individuano il moto irrotazionale di un fluido perfetto incomprimibile. Consideriamo la massa infinitesima $dm = \rho r\, dr\, d\alpha$ all'istante t .All'istante $t + dt$,per effetto del moto (v. fig. 1.4), il punto B si sposta trasversalmente di una quantità pari a

$$(du_t)_B = (V_t)_B \cos\left(\frac{d\alpha}{2}\right)dt - (V_r)_B \; sin\left(\frac{d\alpha}{2}\right)dt = \tag{1.20}$$
$$= V_t\left(r + \frac{dr}{2}, \alpha - \frac{d\alpha}{2}, t\right)dt - V_r\left(r + \frac{dr}{2}, \alpha - \frac{d\alpha}{2}, t\right)\frac{d\alpha}{2}\,dt$$

il punto D si sposta radialmente di

$$(du_r)_D = (V_r)_D \cos\left(\frac{d\alpha}{2}\right)dt - (V_t)_D \, sin\left(\frac{d\alpha}{2}\right)dt = \tag{1.21}$$
$$= V_r\left(r - \frac{dr}{2}, \alpha + \frac{d\alpha}{2}, t\right)dt - V_t\left(r - \frac{dr}{2}, \alpha + \frac{d\alpha}{2}, t\right)\frac{d\alpha}{2}\,dt$$

mentre il punto A si sposterà radialmente e trasversalmente di

$$(du_r)_A = (V_r)_A \cos\left(\frac{d\alpha}{2}\right)dt + (V_t)_A \, sin\left(\frac{d\alpha}{2}\right)dt = \tag{1.22}$$
$$= V_r\left(r - \frac{dr}{2}, \alpha - \frac{d\alpha}{2}, t\right)dt + V_t\left(r - \frac{dr}{2}, \alpha - \frac{d\alpha}{2}, t\right)\frac{d\alpha}{2}\,dt$$

[1.23]
$$(du_t)_A = (V_t)_A \cos\left(\frac{d\alpha}{2}\right)dt - (V_r)_A \sin\left(\frac{d\alpha}{2}\right)dt =$$
$$= V_t\left(r-\frac{dr}{2},\alpha-\frac{d\alpha}{2},t\right)dt - V_r\left(r-\frac{dr}{2},\alpha-\frac{d\alpha}{2},t\right)\frac{d\alpha}{2}\,dt$$

Pertanto i lati AB, AD subiranno rispettivamente le rotazioni $d\beta, d\gamma$ che riferite all'unità di tempo valgono (si sviluppa in serie di Taylor e si trascurano gli infinitesimi del terzo ordine)

[1.24]
$$\begin{cases} \dfrac{d\beta}{dt} = \dfrac{(du_t)_B - (du_t)_A}{dr\,dt} = \dfrac{\dfrac{\partial V_t}{\partial r}\,dr\,dt}{dr\,dt} = \dfrac{\partial V_t}{\partial r} \\[2ex] \dfrac{d\gamma}{dt} = \dfrac{(du_r)_D - (du_r)_A}{\left(r-\dfrac{dr}{2}\right)d\alpha\,dt} = \dfrac{\dfrac{\partial V_r}{\partial \alpha}\,d\alpha\,dt - V_t\,d\alpha\,dt}{r\,d\alpha\,dt} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V_r}{\partial \alpha} - \dfrac{V_t}{r} \end{cases}$$

Per l'irrotazionalità imponiamo che le due velocità angolari siano identiche, ovvero il lato AB deve ruotare in senso antiorario di un angolo pari a quello di cui ruota il lato AD in senso orario durante il tempuscolo dt ,ovvero

[1.25]
$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{d\gamma}{dt}$$

cioè

[1.26]
$$\frac{\partial V_r}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial V_t}{\partial \alpha} - \frac{V_t}{r}$$

La relazione ottenuta permette di ridurre il numero delle incognite del problema. Sarà possibile determinare la velocità della particella di fluido e la pressione che esercita in un punto del campo di moto mediante la conoscenza della funzione "potenziale di velocità" $\Phi(r,\alpha,t)$, definita nel dominio Ω dalle relazioni

[1.27] $$\begin{cases} V_r = \dfrac{\partial\Phi}{\partial r} \\ V_t = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\alpha} \end{cases}$$

Sostituendo nella condizione di irrotazionalità [1.26] precedentemente ricavata si ottiene

[1.28] $$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial\alpha} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha\partial r}$$

ovvero le derivate miste della funzione $\Phi(r,\alpha,t)$ sono identiche.La relazione [1.28] è condizione necessaria e sufficiente per la monodromia della funzione potenziale di velocità $\Phi(r,\alpha,t)$ se il dominio Ω risulta semplicemente connesso (un dominio Ω si definisce semplicemente connesso quando presa una qualsiasi curva chiusa $\Gamma \in \Omega$ e la si contrae fino a ridurla ad un punto, questo punto e tutte le curve ottenute dal processo di contrazione appartengono al dominio).Nel caso in cui il dominio risultasse a connessione multipla di grado n,cioè se esistessero $n-1$ curve chiuse $\Gamma_j \in \Omega$, $j = 1,2,\ldots,n-1$ costituenti parte della frontiera di Ω, per l'univocità del potenziale oltre alla condizione di irrotazionalità è necessario imporre che la circuitazione della velocità attorno alle curve Γ_j sia nulla cioè

[1.29] $$\oint_{\Gamma_j}\vec{V}\cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma_j}V_X\ dx + V_Z\ dz = \oint_{\Gamma_j}\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial z}dz = 0$$

Sostituendo nel sistema [1.19] le relazioni [1.27] si ottiene

$$
[1.30] \qquad \begin{cases}
\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Phi}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2}=0 \\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial r}\left\{p+\dfrac{1}{2}\rho\left[\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2+\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\right)^2\right]+\rho\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}+\rho g\left[z_0+r\,sin(\alpha)\right]\right\}=0 \\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial\alpha}\left\{p+\dfrac{1}{2}\rho\left[\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2+\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\right)^2\right]+\rho\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}+\rho g\left[z_0+r\,sin(\alpha)\right]\right\}=0 \\[2ex]
condizioni \quad al \quad contorno
\end{cases}
$$

Le ultime due equazioni del sistema [1.30] sono condizioni necessarie e sufficienti per l'indipendenza dalle variabili r,α della funzione tra parentesi graffa,definita su un dominio Ω che supponiamo connesso. Il sistema [1.30] si semplifica nel seguente

$$
[1.31] \qquad \begin{cases}
\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Phi}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2}=0 \\[2ex]
p+\dfrac{1}{2}\rho\left[\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2+\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\right)^2\right]+\rho\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}+\rho g\left[z_0+r\,sin(\alpha)\right]=F(t) \\[2ex]
condizioni \quad al \quad contorno
\end{cases}
$$

dove $F(t)$ è una funzione qualsiasi del tempo.Se il dominio Ω non risulta semplicemente connesso è necessario che sia soddisfatta anche la [1.27].

1.5 *MOTO DI UN FLUIDO PERFETTO IRROTAZIONALE CON SUPERFICIE LIBERA*

Se durante il moto una parte del fluido è a contatto con l'aria, la superficie libera di separazione fluido-aria Σ non è nota a priori (v. fig. 1.5),ma è una ulteriore incognita del problema. Infatti,in tutti i punti della superficie Σ la pressione relativa è nulla, e poichè la distribuzione spazio-temporale della pressione è incognita, lo sarà anche la superficie Σ.

Per individuare quest'ultima consideriamo la funzione $\eta(x,t)$,riferita al sistema OXZ, definita come la quota istantanea del punto dove finisce il fluido ed inizia l'aria. Ipotizziamo che il fluido sia perfetto, incomprimibile ed irrotazionale. Le incognite sono il potenziale $\Phi(r,\alpha,t)$, la pressione relativa $p\,(r,\alpha,t)$ e l'elevazione d'onda $\eta(x,t)$. Dall'applicazione della II legge di Newton e del principio di conservazione della massa si sono ottenute le equazioni che legano il potenziale $\Phi(r,\alpha,t)$ e la pressione relativa $p\,(r,\alpha,t)$, riassunte nel sistema differenziale [1.31].

Determiniamo adesso, le relazioni differenziali che intercorrono tra l'elevazione d'onda $\eta(x,t)$ e le funzioni $\Phi(r,\alpha,t), p\,(r,\alpha,t)$.

La superficie libera è isobarica ovvero per $z=\eta \;\Rightarrow\; p=0$ (in tutti i punti della superficie Σ la pressione relativa è nulla), pertanto dalla seconda equazione del sistema [1.31] otteniamo la prima relazione differenziale

[1.32] $$\rho g\eta+\frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\right)^2\right]_{z=\eta}+\rho\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_{z=\eta}=F(t)$$

Inoltre la generica particella che all'istante t occupa la posizione sulla superficie libera individuata dalla quota $z(t) = \eta(x,t)$,all'istante $t + dt$ per effetto della velocità di cui è animata all'istante t ,si sposta nel punto di coordinate

[1.33] $$\begin{cases} x(t+dt) = x(t) + V_X\left[x(t), \eta(x,t), t\right] dt \\ z(t+dt) = z(t) + V_Z\left[x(t), \eta(x,t), t\right] dt \end{cases}$$

Imponiamo che all'istante $t + dt$ la particella appartenga ancora alla superficie libera cioè

[1.34] $$z(t+dt) = \eta\left[x(t+dt), t+dt\right]$$

ovvero

[1.35] $$z(t) + V_Z\Big|_{z=\eta} dt = \eta\left[x(t) + V_X\Big|_{z=\eta} dt, t+dt\right]$$

sviluppiamo in serie di Taylor ed arrestando lo sviluppo ai termini del primo ordine e ricordando che all'istante t la particella occupa la superficie libera alla quota $z(t) = \eta[x(t), t]$, otteniamo dopo aver diviso per dt, la seconda relazione differenziale

[1.36] $$V_Z\Big|_{z=\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial x} V_X\Big|_{z=\eta} + \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

È possibile a questo punto esprimere l'espressione precedente in funzione di (r, α) tenendo conto della relazione che intercorre tra le velocità (V_X, V_Z) e (V_r, V_t)

[1.37] $$\begin{bmatrix} V_X \\ V_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r \\ V_t \end{bmatrix}$$

e di quella che permette di esprimere le derivate parziali fatte rispetto a x, z in funzione delle derivate parziali fatte rispetto a r, α

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\dfrac{sin(\alpha)}{r} \\ \\ sin(\alpha) & \dfrac{\cos(\alpha)}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial r} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial \alpha} \end{bmatrix} \qquad [1.38]$$

con f funzione generica. La riformulazione della [1.36] in coordinate polari, da un lato permette una rappresentazione formale omogenea delle equazioni, dall'altro appesantisce le espressioni delle formule. Pertanto si conviene di lasciare la [1.36] espressa in funzione di x, z.

Ricavate le equazioni [1.32] e [1.36] che esprimono la dipendenza che esiste tra l'elevazione d'onda e i parametri che individuano il campo di moto ed esprimendo tutto in funzione del potenziale di velocità il sistema finale che governa i cosidetti "moti a potenziale" è il seguente

$$[1.39] \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Phi}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} = 0 \\ \\ p + \dfrac{1}{2}\rho\left[\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial r}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\right)^2\right] + \rho\dfrac{\partial \Phi}{\partial t} + \rho\, g\left[z_0 + r\, sin(\alpha)\right] = F(t) \\ \\ \rho\, g\, \eta + \dfrac{1}{2}\rho\left[\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial r}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\right)^2\right]_{z=\eta} + \rho\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{z=\eta} = F(t) \\ \\ \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{z=\eta} = \dfrac{\partial \eta}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{z=\eta} + \dfrac{\partial \eta}{\partial t} \\ \\ condizioni\ \ al\ \ contorno \end{cases}$$

con l'eventuale condizione da soddisfare nel caso in cui il dominio Ω non sia semplicemente connesso

[1.40] $$\oint_{\Gamma_n} \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz = 0$$

dove Γ_n sono curve chiuse costituenti parte della frontiera del dominio.

1.6 *MOTI ONDOSI IN CAMPO LIBERO DA OSTACOLI*

Ipotizziamo che la regione Ω occupata dal fluido sia priva di ostacoli e che una parte di esso sia a contatto con aria: il fluido presenta una superficie libera.

Con riferimento al sistema ortogonale OXZ indicato in fig. 1.6 consideriamo il dominio Ω limitato lungo l'asse z cioè

[1.40] $$\begin{cases} -d \le z \le \eta(x,t) \\ con\ -\infty \le x \le +\infty \end{cases} \qquad \forall\, t \in \left[\, 0,+\infty \right[\ ,\ d > 0$$

Diremo che il moto del fluido avviene su profondità d costante.In campo marittimo, l'interesse maggiore è rivolto ai moti ondosi, ovvero a quei moti che si ripetono nel tempo e nello spazio secondo una certa periodicità. Abbiamo studiato in precedenza che i parametri fisici che permettono di determinare il campo di moto di un fluido perfetto incomprimibile irrotazionale con superficie libera sono il potenziale di velocità $\Phi(r,\alpha,t)$,la pressione relativa $p\,(r,\alpha,t)$ e l'elevazione d'onda $\eta\,(x,t)$. Se il moto è ondoso significa che l'elevazione d'onda $\eta\,(x,t)$ è una funzione doppiamente periodica delle variabili x e t ,cioè

$$\eta\,(x,t)=\eta\,(x+L,t+T) \qquad \begin{gathered}\forall\, x,z\ \in\ \Omega,\ \forall\ t\in\left[\,0,+\infty\,\right[\\ T,L>0\end{gathered} \tag{1.41}$$

dove definiamo L lunghezza d'onda e T periodo d'onda. Pertanto fissato un istante di tempo $\bar{t}$ la superficie libera si presenta come una funzione oscillante $f(x)=\eta(x,\bar{t})$ di periodo spaziale L, oppure fissato un punto della superficie stessa individuato dall'ascissa $\bar{x}$ e l'ordinata $z(t)=\eta(\bar{x},t)$, la quota istantanea $z(t)$ oscilla nel tempo con periodo T.La periodicità della funzione $\eta\,(x,t)$ permette di eseguire lo sviluppo in serie di Fourier dispari (si ipotizza che $\eta\,(x,t)$ sia antisimmetrica rispetto a x e t ,ciò non toglie generalità all'impostazione del problema) ovvero

$$\eta\,(x,t)=\sum_{n=o}^{\infty}\ \sum_{m=0}^{\infty}\eta_{n,m}(z)\ \ sin\left(n\,k\,x+m\omega t\right) \qquad k=\frac{2\pi}{L}\ ,\ \omega=\frac{2\pi}{T} \tag{1.42}$$

Se arrestiamo lo sviluppo ai primi termini della serie otteniamo l'espressione

$$\eta\,(x,t)=\frac{H}{2}\,sin(kx+\omega t) \tag{1.43}$$

in cui i termini costanti che figurano nella serie sono stati considerati nulli perchè si è imposto che

$$\lim_{X\to+\infty}\frac{1}{X}\int_{-X/2}^{X/2}\eta(x,t)\,dx=0 \tag{1.44}$$

ovvero la profondità riferita alla superficie libera è mediamente costante e vale d.Il parametro H si definisce altezza d'onda. La [1.43] può essere interpretata fisicamente come un'onda di superficie che si propaga nella direzione delle x negative.L'aver assunto $\eta\left(x,t\right)$ periodica implica che sia il potenziale di velocità che la pressione sono funzioni periodiche. La semplificazione ottenuta è valida sotto la condizione limite di Stokes (XX)

[1.45] $$\frac{H}{L} \to 0 \ , \ \frac{kH}{\omega T} \to 0$$

Ciò significa che il moto è periodico con celerità $c = L/T$, si manifesta nello spazio con delle sinusoidi di ampiezza infinitesima rispetto alla lunghezza d'onda L e nel tempo sarà un moto lentissimo, cioè le particelle sono animate da una velocità che è proporzionale ad H. Pertanto il potenziale di velocità è anch'esso proporzionale ad H,cioè $\Phi(r,\alpha,t) \propto H$.

Nel sistema [1.39] di conseguenza

$$\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\right)^2\right] \propto H^2 \quad , \quad \frac{\partial\eta}{\partial x}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_{z=\eta} \propto H^2 \quad , \quad \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_{z=\eta} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_{z=0} + o\left(H^2\right)$$

pertanto i termini di ordine superiore ad H possono essere trascurati ottenendo il sistema valido al primo ordine di Stokes

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Phi}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} = 0 \\[2ex]
p + \rho \dfrac{\partial \Phi}{\partial t} + \rho\, g\left[z_0 + r\, sin(\alpha)\right] = F(t) \\[2ex]
\rho\, g\, \eta + \rho\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{z=0} = F(t) \\[2ex]
\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{z=0} = \dfrac{\partial \eta}{\partial t} \\[2ex]
V_Z \Big|_{z=-d} = \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{z=-d} = 0
\end{cases}
\qquad [1.46]
$$

La condizione al contorno aggiunta esprime l'impossibilità che una particella che si trovi alla quota $z=-d$, cioè sul fondo,ad un istante t generico, abbia una velocità V_Z non nulla. Se ciò fosse possibile la particella tenderebbe a compenetrare il fondo oppure a creare una zona di vuoto e tali condizioni di moto sono assurde dal punto di vista fisico.

La soluzione analitica del sistema [1.46] è stata fornita da Stokes e ha espressione [1.47]

$$
\begin{cases}
\Phi_W(r,\alpha,t) = g\,\dfrac{H}{2\omega}\,\dfrac{\cosh\left[k(z+d)\right]}{\cosh(kd)}\cos\left[kr\cos(\alpha)+\omega t\right] + \dfrac{1}{\rho}\displaystyle\int_0^t F(\xi)\,d\xi \\[2em]
\eta_W(r,\alpha,t) = \dfrac{H}{2}\,\mathrm{sen}\left[kr\cos(\alpha)+\omega t\right] \\[2em]
p_W(r,\alpha,t) = -\rho\,g\,z + \left\{\rho\,g\,\dfrac{H}{2}\,\dfrac{\cosh\left[k(z+d)\right]}{\cosh(kd)}\,\mathrm{sen}\left[kr\cos(\alpha)+\omega t\right]\right\} = \\
= -\,\rho\,g\,z + \Delta p_W(r,\alpha,t) \\[2em]
k\,tgh\,(kd) = \dfrac{\omega^2}{g}
\end{cases}
$$

con

[1.48]
$$
\begin{cases}
x = r\,\cos(\alpha) \\
z = -h + r\,sin(\alpha)
\end{cases}
$$

Se il moto avviene su profondità infinita cioè $\dfrac{d}{L} \to +\infty$ $(kd \to +\infty)$ le espressioni [1.47] si semplificano nelle [1.49]

$$
\begin{cases}
\Phi_W(r,\alpha,t) = g\,\dfrac{H}{2\omega}\,e^{-kh}e^{-krsin(\alpha)}\,\cos\left[kr\cos(\alpha)+\omega t\right]+\dfrac{1}{\rho}\displaystyle\int_0^t F(\xi)\,d\xi \\[2ex]
\eta_W(r,\alpha,t) = \dfrac{H}{2}\,\mathrm{sen}\left[kr\cos(\alpha)+\omega t\right] \\[2ex]
p_W(r,\alpha,t) = -\rho\,g\,z + \left[\rho\,g\,\dfrac{H}{2}\,e^{-kh}e^{-krsin(\alpha)}\,\mathrm{sen}\left[kr\cos(\alpha)+\omega t\right]\right] = \\
\qquad = -\rho\,g\,z + \Delta p_W(r,\alpha,t) \\[2ex]
k = \dfrac{\omega^2}{g}
\end{cases}
$$

[1.49]

Infatti

[1.50]

$$
\begin{cases}
\lim\limits_{kd\to+\infty}\dfrac{\cosh[k(z+d)]}{\cosh(kd)} = e^{-kz} = e^{-kh}e^{krsin(\alpha)} \\[2ex]
\lim\limits_{kd\to+\infty} tgh(kd) = 1
\end{cases}
$$

Possiamo concludere che sotto la validità del limite di Stokes e nell'ipotesi di campo libero da ostacoli, esiste un regime di moto periodico caratterizzato dalle funzioni $\eta_W, \Phi_W, \Delta p_W$: Δp_W indica la variazione che subisce la pressione idrostatica $-\rho g z$ per effetto del moto ondoso, η_W indica la variazione della quota della superficie libera rispetto alla condizione di quiete e Φ_W il potenziale di velocità. Indichiamo il regime di moto ondoso in campo libero da ostacoli come quello prodotto da un'onda regolare detta "incidente".