

# EFFETTI DI NON LINEARITÀ PER LE ONDE GENERATE DAL VENTO

*Felice Arena e Francesco Fedele*

Dipartimento di Meccanica e Materiali, Università degli Studi di Reggio Calabria  
Via Graziella, loc. Feo di Vito – 89100 Reggio Calabria

## Sommario

*Gli autori hanno proposto recentemente un nuovo metodo che consente di ricavare la densità di probabilità, la distribuzione dei massimi assoluti e la distribuzione dei minimi assoluti di numerosi processi stocastici, al secondo ordine, nel campo dell'idraulica marittima.*

*Nella memoria tale metodo viene applicato ai processi seguenti: elevazione d'onda e fluttuazione del carico di pressione in un campo di onde progressive; elevazione d'onda e fluttuazione del carico di pressione in un campo di onde in riflessione.*

*Le distribuzioni dei massimi e dei minimi vengono infine confrontate con i dati degli esperimenti eseguiti nel mare di Reggio Calabria.*

## Introduzione

L'analisi al primo ordine delle proprietà statistiche delle onde generate dal vento si rivela efficace per prevedere la distribuzione delle altezze delle onde in uno stato di mare. Tale distribuzione coincide con una Rayleiana se lo spettro è infinitamente stretto (*Longuet-Higgins*, 1952), e tende a una Weibull per spettri di larghezza finita (*Boccotti*, 1989).

Le distribuzioni delle creste e dei cavi delle onde di mare presentano invece delle caratteristiche asimmetrie, dovute a effetti di non linearità.

L'analisi degli effetti di non linearità è stata avviata da *Longuet-Higgins* (1963), il quale ha ricavato un'espressione della densità di probabilità  $f_{\xi}$  dell'elevazione d'onda come sviluppo in serie di polinomi di Hermite. In particolare la  $f_{\xi}$  di *Longuet-Higgins*, ricavata a partire dai primi tre termini della serie e nell'ipotesi di spettro infinitamente stretto, per ripidità superiori a circa 0.2 (essendo la ripidità  $\varepsilon = k\sigma$ ,  $k$  il numero d'onda e  $\sigma$  la deviazione standard del processo al primo ordine) non verifica la condizione

$$f_{\xi}(\xi) > 0, \quad \forall \xi \in \mathbf{R}, \quad (1)$$

cioè esistono intervalli di  $\xi$  in cui risulta  $f_{\xi}(\xi) < 0$ .

Questa incongruenza è stata superata da *Tayfun* (1980 e 1983) che ha ricavato un'espressione della densità di probabilità dell'elevazione d'onda che soddisfa la condizione (1), ed ha inoltre ricavato le probabilità di superamento delle creste e dei cavi dell'elevazione d'onda. I risultati di *Tayfun* sono ricavati nell'ipotesi di onde in campo indisturbato al secondo ordine di approssimazione, con spettro infinitamente stretto.

Recentemente gli autori (*Arena e Fedele*, 2000) hanno ricavato la densità di probabilità, la distribuzione dei massimi assoluti (creste) e la distribuzione dei minimi assoluti (cavi) di una famiglia di processi stocastici, che comprende numerosi processi (al secondo ordine, con spettro infinitamente stretto) nel campo dell'idraulica marittima. In particolare a tale famiglia appartengono il processo elevazione d'onda e il processo fluttuazione del carico di pressione, sia in campo indisturbato sia in presenza di ostacoli.

Nel presente lavoro vengono ricavate le proprietà dei processi seguenti:

- i) elevazione d'onda in un campo di onde progressive;
- ii) fluttuazione del carico di pressione in un campo di onde progressive;
- iii) elevazione d'onda in un campo di onde in riflessione;
- iv) fluttuazione del carico di pressione in un campo di onde in riflessione.

Le distribuzioni delle creste e dei cavi vengono infine confrontate con i dati degli esperimenti eseguiti nel mare di Reggio Calabria tra il 1990 e il 1993 (Boccotti e al., 1993; Boccotti, 1997; Arena, 1995). Si tratta di onde di superficie e di onde del carico di pressione misurate in campo indisturbato e di onde del carico di pressione in presenza di una parete verticale riflettente.

### Proprietà di una famiglia di processi stocastici con spettro infinitamente stretto

*La densità di probabilità*

Si consideri la seguente famiglia  $\psi$  di processi stocastici:

$$\psi(x, y, t) = f(x, y)a \cos[\chi(x, t)] + g(x, y)a^2 \cos^2[\chi(x, t)] + h(x, y)a^2 \sin^2[\chi(x, t)], \quad (2)$$

dove  $a$  è una variabile aleatoria distribuita come una Rayleiana e dove

$$\chi(x, t) = kx - \omega_0 t + \theta, \quad (3)$$

essendo  $k$  il numero d'onda,  $\omega_0$  la frequenza angolare e  $\theta$  una variabile aleatoria uniformemente distribuita in  $(0, 2\pi)$ . Definendo i processi stocastici gaussiani  $Z_1$  e  $Z_2$

$$Z_1(x, t) = \frac{a \cos(\chi)}{\sigma}, \quad Z_2(x, t) = \frac{a \sin(\chi)}{\sigma}, \quad (4)$$

dove  $\sigma$  è la deviazione standard del processo lineare  $\xi(x, y, t) = a \cos[\chi(x, t)]$ , il processo (2) può essere riscritto nella forma

$$\psi(Z_1, Z_2) = \sigma [F(x, y) Z_1 + G(x, y) Z_1^2 + H(x, y) Z_2^2], \quad (5)$$

dove

$$F(x, y) \equiv f(x, y), \quad G(x, y) \equiv \sigma g(x, y), \quad H(x, y) \equiv \sigma h(x, y). \quad (6)$$

Il processo  $\psi$  ha media e varianza rispettivamente uguali a

$$\bar{\psi} = \sigma F(\alpha_1 + \alpha_2), \quad \text{var}(\psi) = \frac{\sigma^2 F^2}{\beta^2}, \quad (7)$$

avendo definito

$$\alpha_1 = \frac{G}{F}, \quad \alpha_2 = \frac{H}{F}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + 2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)}}. \quad (8)$$

Gli autori (2000) hanno ricavato che, definendo il processo standardizzato

$$\zeta = \frac{\psi - \bar{\psi}}{\sqrt{\text{var}(\psi)}}, \quad (9)$$

la densità di probabilità  $f_\zeta(\zeta)$  risulta:

$$f_\zeta(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\zeta} \frac{\exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(\omega\beta)^2}{1+4(\omega\beta\alpha_1)^2}\right] \exp\left\{-i\omega\beta\left[\alpha_1 + \alpha_2 + \frac{(\omega\beta)^2\alpha_1}{1+4(\omega\beta\alpha_1)^2}\right]\right\}}{\sqrt{1-4(\omega\beta)^2\alpha_1\alpha_2 - 2i\omega\beta(\alpha_1 + \alpha_2)}} d\omega. \quad (10)$$

Il processo (5) è pertanto, in generale, non gaussiano. Al tendere di  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  a zero, ogni processo della famiglia stocastica (5) converge in probabilità al processo gaussiano  $Z_1$ .

L'espressione (10) si semplifica per processi a media nulla, nei quali risulta  $\alpha_1 = -\alpha_2$ . In tali condizioni la densità di probabilità si riduce alla forma:

$$f_\zeta(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(\omega\beta)^2}{1+4(\omega\beta\alpha)^2}\right] \cos\left\{\omega\left[\zeta + \beta \frac{(\omega\beta)^2\alpha}{1+4(\omega\beta\alpha)^2}\right]\right\}}{\sqrt{1+4(\omega\beta\alpha)^2}} d\omega, \quad (11)$$

avendo definito  $\alpha = G/F$  e  $\beta = 1/\sqrt{1+4\alpha^2}$  (si noti che  $G+H=0 \Leftrightarrow \alpha_1 = -\alpha_2$ ).

#### La distribuzione delle creste e la distribuzione dei cavi

La distribuzione delle ampiezze dei massimi assoluti (creste)  $\Psi_{high}$  e la distribuzione delle ampiezze, in modulo, dei minimi assoluti (cavi)  $\Psi_{low}$  della famiglia  $\psi$  di processi stocastici, risultano:

i) se  $\alpha_1 > 0$ :

$$\begin{cases} P(\zeta_{high} > \zeta) = f_1(\zeta), \\ P(\zeta_{low} > \zeta) = \begin{cases} f_2(\zeta) & \text{se } \zeta \leq \beta/4|\alpha_1|, \\ 0 & \text{se } \zeta > \beta/4|\alpha_1|, \end{cases} \end{cases} \quad (12)$$

ii) se  $\alpha_1 < 0$ :

$$\begin{cases} P(\zeta_{high} > \zeta) = \begin{cases} f_2(\zeta) & \text{se } \zeta \leq \beta/4|\alpha_1|, \\ 0 & \text{se } \zeta > \beta/4|\alpha_1|, \end{cases} \\ P(\zeta_{low} > \zeta) = f_1(\zeta), \end{cases} \quad (13)$$

avendo definito le variabili adimensionali:

$$\zeta_{high} = \frac{\Psi_{high}}{\sqrt{\text{var}(\psi)}}, \quad \zeta_{low} = \frac{\Psi_{low}}{\sqrt{\text{var}(\psi)}}. \quad (14)$$

Le funzioni  $f_1$  e  $f_2$  risultano rispettivamente:

$$f_1(\zeta) = \exp \left[ -\frac{1}{8\alpha_1^2} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{4|\alpha_1|\zeta}{\beta}} \right)^2 \right], \quad (15)$$

$$f_2(\zeta) = \exp \left[ -\frac{1}{8\alpha_1^2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4|\alpha_1|\zeta}{\beta}} \right)^2 \right] - \exp \left[ -\frac{1}{8\alpha_1^2} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{4|\alpha_1|\zeta}{\beta}} \right)^2 \right] \quad (16)$$

[i parametri  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\beta$  sono definiti dalla Eq.ne (8)].

Se  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  sono infinitesimi, la famiglia (5) è quasi-simmetrica. In tali condizioni le probabilità di superamento definite dalle Eq.ni (12) e (13) possono essere riscritte rispettivamente nella forma:

i) se  $\alpha_1 > 0$ :

ii) se  $\alpha_1 < 0$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} P(\zeta_{high} > \zeta) = \exp \left[ -\frac{1}{2} \zeta^2 (1 - \alpha_1 \zeta)^2 \right], \\ P(\zeta_{low} > \zeta) = \exp \left[ -\frac{1}{2} \zeta^2 (1 + \alpha_1 \zeta)^2 \right], \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} P(\zeta_{high} > \zeta) = \exp \left[ -\frac{1}{2} \zeta^2 (1 + \alpha_1 \zeta)^2 \right], \\ P(\zeta_{low} > \zeta) = \exp \left[ -\frac{1}{2} \zeta^2 (1 - \alpha_1 \zeta)^2 \right]. \end{array} \right. \quad (17)$$

Le Eq.ni (12) e (13) [o, in alternativa, l'Eq.ne (17)] consentono di concludere che il processo è asimmetrico, essendo il valore del massimo atteso  $\overline{\zeta_{high}}$  generalmente diverso dal valore del minimo atteso  $\overline{\zeta_{low}}$ . In particolare si ricava che se  $\alpha_1 > 0$  risulta  $\overline{\zeta_{high}} > \overline{\zeta_{low}}$  e se  $\alpha_1 < 0$  risulta  $\overline{\zeta_{high}} < \overline{\zeta_{low}}$ .

## Applicazioni

### Introduzione

I risultati del paragrafo precedente vengono applicati al processo elevazione d'onda e al processo fluttuazione del carico di pressione, sia per onde progressive sia per onde in riflessione. Le previsioni vengono eseguite avendo fissato la ripidità  $\varepsilon = .055$  (spettro JONSWAP medio con parametro di Phillips uguale a 0.01). Viene poi proposto il confronto con i dati degli esperimenti eseguiti nel mare di Reggio Calabria. I dati delle onde in campo indisturbato sono relativi all'esperimento RC1990 (Boccotti e al. 1993a; Boccotti, 1997); si tratta di registrazioni di onde di superficie e di onde del carico di pressione. I dati delle onde in riflessione sono relativi agli esperimenti RC1991 e RC1994 (Boccotti e al., 1993b; Boccotti, 1997; Arena, 1995); si tratta di onde del carico di pressione misurate su una parete verticale.

Per i dettagli sugli esperimenti si rimanda ai lavori citati in bibliografia.

### Onde di mare progressive: l'elevazione d'onda

L'elevazione d'onda al II ordine risulta:

$$\eta(x,t) = \sigma Z_1 + \sigma \varepsilon f_\eta (Z_1^2 - Z_2^2), \quad (18)$$

dove

$$f_\eta(kd) = \frac{[2 + \cosh(2kd)] \cosh(kd)}{4 \sinh^3(kd)}, \quad (19)$$

essendo le funzioni  $Z_1$  e  $Z_2$  definite dall'Eq.ne (4). Definendo poi

$$F = 1, \quad G = \varepsilon f_\eta, \quad H = -G, \quad (20)$$

si ricava che il processo (18) appartiene alla famiglia (5).

La Figura 1 confronta la probabilità di superamento delle creste e la probabilità di superamento dei cavi del processo elevazione d'onda in campo indisturbato, su profondità infinita. In particolare il quadro di sinistra riporta i dati sperimentali, il quadro di destra le previsioni a partire dall'Eq.ne (18). Le previsioni confermano che, fissata una soglia della probabilità di superamento, l'altezza della cresta è maggiore della profondità del cavo.

*Onde di mare progressive: il carico di pressione dinamica*

Il carico di pressione dinamica al II ordine risulta

$$\eta_{\Delta p}(x, y, t) = \sigma f_{ph_1} Z_1 + \sigma \varepsilon (f_{ph_2} - f_{ph_3}) Z_1^2 - \sigma \varepsilon (f_{ph_2} + f_{ph_3}) Z_2^2, \quad (21)$$

dove

$$f_{ph_1}(ky, kd) = \frac{\cosh[k(y+d)]}{\cosh(kd)}; \quad f_{ph_2}(ky, kd) = \frac{3 \cosh[2k(y+d)] - \sinh^2(kd)}{4 \sinh^3(kd) \cosh(kd)}; \quad (22)$$

$$f_{ph_3}(ky, kd) = \frac{\cosh[2k(y+d)] - 1}{2 \sinh(2kd)}.$$

Definendo

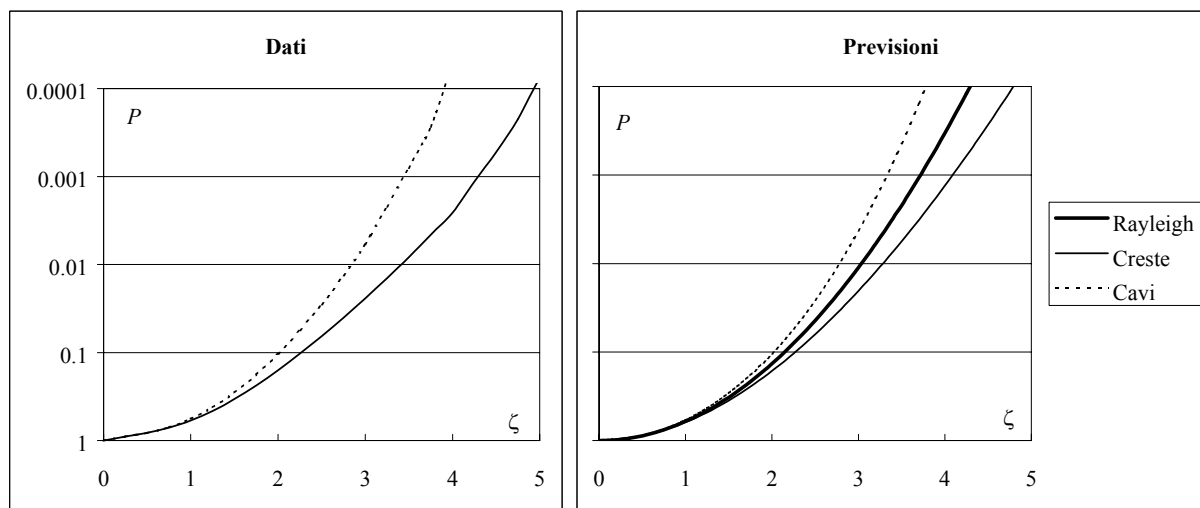


Figura 1. Distribuzioni delle creste e dei cavi del processo elevazione d'onda in campo indisturbato, su profondità infinita: confronto tra i dati e le previsioni.

$$F = f_{ph_1}; \quad G = \varepsilon(f_{ph_2} - f_{ph_3}); \quad H = -\varepsilon(f_{ph_2} + f_{ph_3}); \quad (23)$$

si ricava che anche il processo (21) appartiene alla famiglia (5).

Si noti infine che considerando il processo (21) a media nulla, e cioè assumendo

$$\eta_{\Delta p}(x, y, t) = \sigma f_{ph_1} Z_1 + \sigma \varepsilon f_{ph_2} (Z_1^2 - Z_2^2), \quad (24)$$

si ricava che esso appartiene alla famiglia (5), avendo definito:

$$F = f_{ph_1}; \quad G = \varepsilon f_{ph_2}; \quad H = -G. \quad (25)$$

La Figura 2 riporta le probabilità di superamento delle creste e dei cavi delle fluttuazioni del carico di pressione. Le previsioni, ricavate dall'Eq.ne (21), confermano un'inversione delle asimmetrie creste-cavi della fluttuazione del carico di pressione (rispetto alle onde di superficie).

Tali asimmetrie, essendo dovute al termine  $f_{ph_3}$  (indipendente dal tempo), risultano trascurabili per il processo media nulla (24). Il processo (24) a media nulla diventa poi simmetrico su profondità infinita (cioè la distribuzione delle creste coincide con la distribuzione dei cavi).

*Onde di mare in riflessione: l'elevazione d'onda*

Si consideri il campo di moto davanti ad una parete verticale infinitamente lunga. L'elevazione d'onda al secondo ordine risulta:

$$\eta(x, t) = 2\sigma \cos(kx)Z_1 + 2\sigma \varepsilon f_{\eta} \cos(2kx)(Z_1^2 - Z_2^2). \quad (26)$$

Tale processo appartiene alla famiglia di processi (5), avendo definito

$$F = 2 \cos(kx); \quad G = 2\varepsilon f_{\eta} \cos(2kx); \quad H = -G. \quad (27)$$

Si noti che le distribuzioni delle creste e dei cavi dell'elevazione d'onda sulla parete (dove risulta  $x = 0$ ) coincidono con le rispettive distribuzioni dell'elevazione d'onda in campo indisturbato.

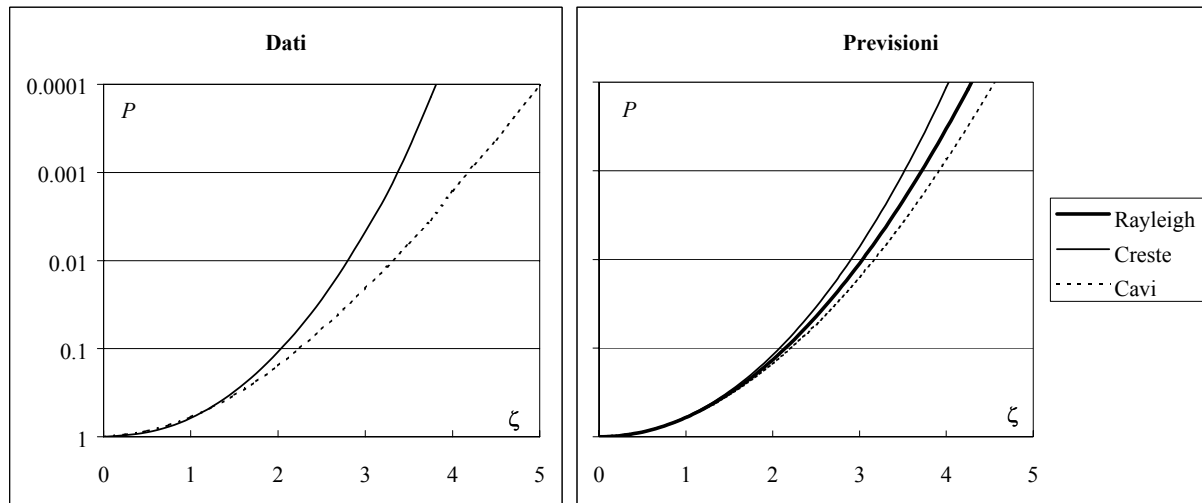


Figura 2. Distribuzioni delle creste e dei cavi del processo fluttuazione del carico di pressione in campo indisturbato, alla quota  $ky = -.6$  (la profondità è infinita): confronto tra i dati e le previsioni.

*Onde di mare in riflessione: il carico di pressione dinamica*

Il carico di pressione dinamica davanti a una parete verticale, al II ordine, può essere scritto nella forma

$$\eta_{\Delta p}(x, y, t) = 2\sigma f_{ph_1} \cos(kx) Z_1 + 2\sigma \varepsilon [f_{ph_2} \cos(2kx) - f_{ph_3} + f_{ph_4}] Z_1^2 + \quad (28)$$

$$- 2\sigma \varepsilon [f_{ph_2} \cos(2kx) + f_{ph_3} + f_{ph_4}] Z_2^2;$$

dove

$$f_{ph_4}(ky, kd) = \frac{\cosh^2[k(y+d)] - \cosh(2kd)}{\sinh(2kd)}. \quad (29)$$

Tale processo appartiene alla famiglia (5), avendo definito

$$F = 2f_{ph_1} \cos(kx); \quad G = 2\varepsilon [f_{ph_2} \cos(2kx) - f_{ph_3} + f_{ph_4}]; \quad (30)$$

$$H = -2\varepsilon [f_{ph_2} \cos(2kx) + f_{ph_3} + f_{ph_4}].$$

Infine, considerando il processo carico di pressione dinamica a media nulla, la (28) diventa:

$$\eta_{\Delta p}(x, y, t) = 2\sigma f_{ph_1} \cos(kx) Z_1 + 2\sigma \varepsilon [f_{ph_2} \cos(kx) + f_{ph_4}] Z_1^2 - 2\sigma \varepsilon [f_{ph_2} \cos(kx) + f_{ph_4}] Z_2^2. \quad (31)$$

Il processo (31) a media nulla appartiene alla famiglia (5), avendo definito:

$$F = 2f_{ph_1} \cos(kx); \quad G = 2\varepsilon [f_{ph_2} \cos(2kx) + f_{ph_4}]; \quad H = -G. \quad (32)$$

Le Figure 3 e 4 mostrano le probabilità di superamento delle creste e dei cavi della fluttuazione del carico di pressione su una parete verticale riflettente (per  $x=0$ ). I dati sperimentali sono ricavati da *Boccotti* (1997) e da *Arena* (1995). Le previsioni confermano un incremento degli effetti di non linearità per il carico di pressione dinamica su una parete verticale, rispetto al carico di pressione in campo indisturbato.

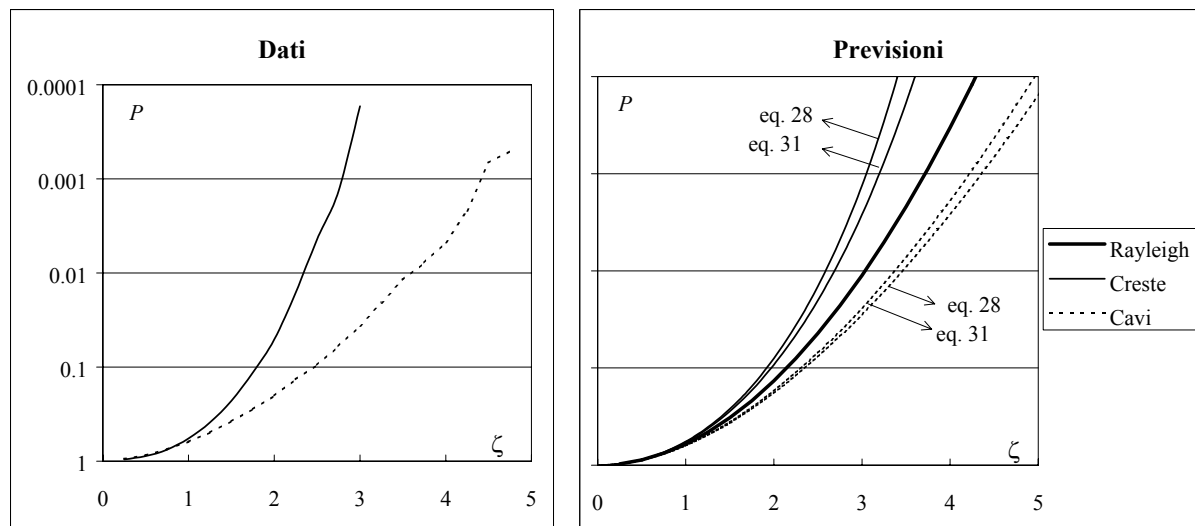


Figura 3. Confronto tra le distribuzioni delle creste e dei cavi del processo fluttuazione di pressione su una parete verticale ( $kd = 1.26$  e  $ky = -0.44$ ). Le previsioni sono ricavate sia per il processo (28) sia per il processo a media nulla (31).

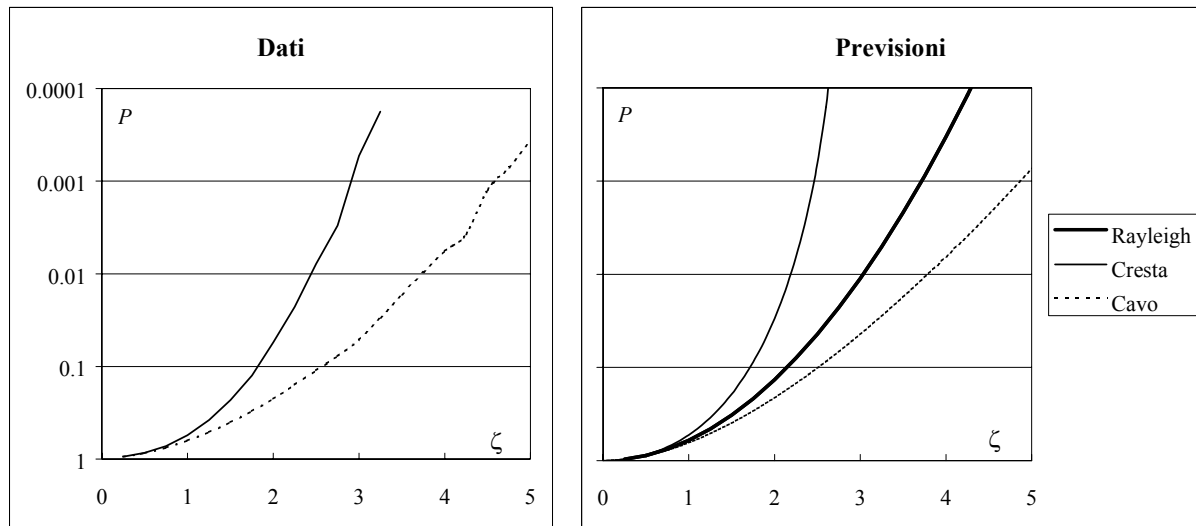


Figura 4. Confronto tra le distribuzioni delle creste e dei cavi del processo fluttuazione di pressione su una parete verticale ( $kd = 1.26$  e  $ky = -1.26$ ).  
Le previsioni per i processi (28) e (31) coincidono.

Gli effetti di non linearità sulla parete risultano marcati sia considerando il processo (28), sia considerando il processo (31) a media nulla. Inoltre, essendo le differenze tra i processi (28) e (31) dovute al termine costante  $f_{ph_3}$ , esse si attenuano con la profondità. Ad esempio dalla Figura 4 si evince che, al piede della parete verticale, sia le distribuzioni delle creste sia le distribuzioni dei cavi, ricavate a partire dai processi (28) e (31), coincidono rispettivamente.

## Bibliografia

- Arena F., Forze delle onde di mare su una parete verticale, *Atti Giornate Italiane di Ingegneria Costiera, Ravenna*, 73-84, 1995.
- Arena F. e Fedele F., Una famiglia di processi aleatori non lineari per la meccanica delle onde di mare, *Dipartimento Meccanica e Materiali*, 1-20, 2000.
- Boccotti P., On mechanics of irregular gravity waves. *Atti Acc. Naz. Lincei, Memorie*, VIII, 111-170, 1989.
- Boccotti P., Barbaro G., e Mannino L., A field experiment on the mechanics of irregular gravity waves. *J. Fluid Mech.*, 252, 173-186, 1993a.
- Boccotti P., Barbaro G., Fiamma V., Mannino L. e Rotta A., An experiment at sea on the reflection of the wind waves, *Ocean Engng.*, 20, 493-507, 1993b.
- Boccotti P., *Idraulica Marittima*, UTET, 1-522, 1997.
- Borgman L. E., Ocean wave simulation for engineering design, *J. Waterways and Harbors Div., ASCE*, 557-583, 1969.
- Hasselmann, K., Barnett, T. P., Bouws, E. e al., Measurements of wind wave growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP). *Deut. Hydrogr. Zeit.*, A8, 1-95, 1973.
- Longuet-Higgins M. S., On the statistical distribution of the heights of sea waves. *J. Mar. Res.*, 11, 245-266, 1952.
- Longuet-Higgins M. S., The effects of non-linearities on statistical distributions in the theory of sea waves. *J. Fluid Mech.*, 17, 459-480, 1963.
- Tayfun M. A., Narrow-band nonlinear sea waves. *J. Geophys. Res.*, 85, 1548-1552, 1980.
- Tayfun M. A., Nonlinear effects on the distribution of crest-to-trough heights. *Ocean Engng.*, 10, 197-206, 1983.